Математикалық физика теңдеулері

Теория, жаттығулар мен өзіндік жұмыстар

Оқу құралы

Хомпыш Хонатбек

Алматы,
Қазақ университеті, 2018

ӘОЖ 517(000)
КБЖ 00.000.00

әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университеті

Пікір жазғандар:
Физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Сахаев Ш.С.,
әл-Фараби атындағы ҚазҰУ,
Физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Ақыш А.Ш.,
ҚР БжҒМ МММИ,
Физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Қошанов Б.Д.,
Абай атындағы ҚазҰПУ.

Хомпыш Х. Математикалық физика теңдеулері: Теория, жаттығулар мен өзіндік жұмыстар. Оқу құралы. –Алматы, Қазақ университеті, 2017 -295 б.

Оқу құралы математика, механика, математикалық және компьютерлік моделдеу және т.б. техникалық ғылымдар бағытындағы мамандықтар бойынша білім алушыларға арнап жазылған.

Кітапта математикалық физиканың негізгі теңдеулері: толқындық, жылуөткізгіштік, Лаплас, Пуассон теңдеулері және оларға қойылатын негізгі есептер мен оларды шешудің әдістері қарастырылған. Әрбір тақырыпта қысқаша теориялық түсініктер мен мысалдар келтіріліп, жаттығулар мен өзіндік жұмыстар жинағы берілген.

Оқу құралының мазмұны автордың "Математикалық физика теңдеулері" пәні бойынша Абай атындағы ҚазҰПУ, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ оқып келе жатқан дәрістері мен жүргізген семинарлық сабақтарының материалдарына негізделген.

Мазмұны

Белгілеулер

Оқу құралында кездесетін математикалық белгілеулер, кванторлар:

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – нүкте, кеңістіктік айнымалы,

t – уақыт, уақыттық айнымалы,

$u\,(x, t)$ – ізделінді шешім,

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ – натурал сандар жиыны,

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ – бүтін сандар жиыны,

$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ – барлық нақты сандар жиыны,

$\mathbb{R}^n$ – n өлшемді евклид кеңістігі,

Ω – кеңістіктік айнымалы бойынша облыс,

$\partial\Omega = S$ – Ω облысының шекарасы,

$Q_T \equiv \Omega \times [0, T]$ – цилиндрлік облыс,

$\vec{n}$ – $\partial\Omega$ бетке тұрғызылған сыртқы нормаль,

$\triangle u = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$ – Лаплас операторы,

$\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n} \right)$ – градиент операторы,

$\forall$ – кез келген, барлық.

$\exists$ – табылады, бар болады.

Алғы сөз

Көптеген механикалық, физикалық және т.б. құбылыстарды математикалық тұрғыда зерттеу әдетте дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін қойылған есептерді шешуге ұштасады. Мұндай есептерді шешу, яғни шешімінің бар болу, жалғыз болу және орнықты болу мәселелерін зерттеу осы математикалық физика теңдеулері пәнінің негізгі обьектілері болып табылады. Сондықтан да математикалық физика теңдеулері пәні – еліміздің ЖОО-ның математика, механика, математикалық және компьютерлік моделдеу мамандықтарының оқу бағдарламаларындағы міндетті түрде оқытылатын пәндердің бірі болып табылады.

Оқу құралы автордың бұған дейін жарық көрген математикалық физика теңдеулері атты оқу құралының қайта өңдеген және өзіндік жұмыстар жинағымен толықтырылған екінші басылымы болмақ.

Оқу құралының мазмұны аталған мамандықтардың мемлекеттік стандарты шеңберінде, автордың Абай атындағы ҚазҰПУ-да, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ-да оқып келе жатқан дәрістері мен жүргізген семинарлық сабақтарының материалдары негізінде жазылды.

Кітапта математикалық физиканың негізгі теңдеулері: параболалық типті теңдеулерден жылуөткізгіштік, гиперболалық типтен толқындық, ал эллипстік типтен Лаплас, Пуассон теңдеулері және оларға қойылатын негізгі есептер: Коши есебі, шеттік есеп, бастапқы-шеттік есептері қарастырылады. Сонымен қатар Фурье әдісі, сипаттауыштар, жалғастыру, потенциалдар, Грин функциясын құру және интегралдық түрлендірулер сынды негізгі классикалық әдістер түсіндіріліп, оларды қолданып жоғарыдағы аталған есептерді шешудің тиімді жолдары көрсетіледі. Алайда, математикалық физика курсының барлық тақырыптары толық қамтылды деп айта алмаймын.

Оқу құралының құрылымы: әрбір тақырыпқа қатысты анықтамалар мен тұжырымдар, негізгі әдістер сынды қысқаша теориялық түсініктер берумен және соңынан мысалдар арқылы нақты есептерді шешу, компьютерлік бағдарламалар көмегімен шешімнің графигін көруге дейін түсіндіру негізінде құрастырылды. Оқырманның алған білімдерін қалыптастыруы үшін әрбір тақырып соңында жаттығу есептері және әрқайсысы 25 есептен тұратын 20 нұсқалық есептер жинағы және олардың жауаптары ұсынылды. Оқу құралындағы есептер мен жаттығуларды құрастыруда біршама жаңа есептер құрастырылумен қатар библиографиялық тізімде көрсетілген көптеген әдебиеттерден есептер алынып қолданылды.

Оқу құралына қатысты оқырмандардың сын, ой-пікірлері болса, автор түсіністікпен, ризашылықпен қабылдайды және *konat_k@mail.ru* электрондық почтасы арқылы жолдауын сұрайды.

Автор

1 Бөлім

Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер

1.1 Екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер. Типін анықтау және канондық түрге келтіру

1.1.1. Негізгі ұғымдар мен анықтамалар

Айталық, $\Omega - n$ өлшемді $\mathbb{R}^n$ Евклид кеңістігіндегі қандайда бір облыс, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) - \Omega$ облысында жататын кез келген нүкте, ал $u\,(x_1, x_2, ..., x_n)$ – осы Ω облысында анықталған функция болсын.

Анықтама 1.1.1. *$x_1, x_2, ..., x_n$ тәуелсіз айнымалыларын, ізделінді $u\,(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциясын және оның $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_n}, ..., \dfrac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} ... x_n^{i_n}}, \ldots$ дербес туындыларын байланыстыратын теңдеуді дербес туындылы дифференциалдық теңдеу деп атайды және оның жалпы түрін қысқаша*

$$F\left(x_1, ...x_n,\, u,\, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} ... x_n^{i_n}}, \ldots\right) = 0 \tag{1.1.1}$$

теңдігі түрінде жазады. Мұндағы $F\,(x_1, ..., u,\, u_{x_1}, ...)$ белгілі функция және оның $\dfrac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} ... x_n^{i_n}}$ бойынша туындыларының ең болмағанда біреуі нөлге тең емес, $i_1 + i_2 + ... + i_n = k$.

Анықтама 1.1.2. *Теңдеуге қатысатын $u\,(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциясының дербес туындыларының ең үлкен реті сол теңдеудің реті деп аталады.*

Анықтама 1.1.3. *Егер $u = \varphi\,(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциясы (1.1.1) теңдеудің Ω – берілу облысында өзінің теңдеуге қатысатын барлық дербес туындыларымен бірге үзіліссіз болса және* *теңдеуді тепе-теңдікке айналдырса, онда* $u = \varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ *функциясын* (1.1.1) *дербес туындылы дифференциалдық теңдеудің классикалық (регулярлық) шешімі деп атайды.*

Анықтама 1.1.4. *Егер* (1.1.1) *теңдеудегі* F *функциясы* $\dfrac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} ... x_n^{i_n}}$, $0 \le k \le m$ *түрдегі барлық туындыларына сызықты тәуелді болса, онда* (1.1.1) *теңдеу сызықтық теңдеу деп аталады.*

Мәселен, m ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеудің жалпы түрі:

$$F\left(x_1, ...x_n,\, u,\, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^m u(x_1, ..., x_n)}{\partial x_1^{i_1} ... x_n^{i_n}}\right) = 0, \quad i_1 + ... + i_n = m$$

немесе

$$Lu \equiv \sum_{k=0}^{m} \sum_{i_1, ..., i_n} a_{i_1, ..., i_n}(x) \frac{\partial^k u(x)}{\partial x_1^{i_1} ... x_n^{i_n}} = f(x), \;\; x \in D, \;\; i_1 + ... + i_n = k \quad (1.1.2)$$

түрде болады.

Анықтама 1.1.5. *Егер* (1.1.2) *теңдеуде* $f(x) \equiv 0$ *болса, онда теңдеу біртекті, ал кері жагдайда біртекті емес деп аталады.*

Анықтама 1.1.6. *Егер* (1.1.1) *теңдеудегі* F *функциясы* m *– ретке дейінгі, ягни* $\dfrac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} ... x_n^{i_n}}$, $0 \le k < m$ *түрдегі барлық туындыларына сызықты тәуелді болса, онда* (1.1.1) *теңдеу квазисызықтық теңдеу деп аталады. Қалган жагдайларда теңдеу сызықтық емес деп аталады.*

Мысал 1.1.1. *Келесі теңдеулердің ретін және түрін анықтаңыз:*

а) $\dfrac{\partial}{\partial x}(3u_x - yu_y) + \dfrac{\partial}{\partial y}(yu_x - u) - u_y + 2yu = 0$ – теңдеуі екінші ретті, сызықтық біртекті теңдеу. Себебі:

$3u_{xx} - yu_{xy} + yu_{yx} - u_{yy} - u_y + 2yu = 3u_{xx} - u_{yy} - u_y + 2yu = 0.$

ә) $\dfrac{\partial}{\partial x}(3u_x - yu_y) + \dfrac{\partial}{\partial y}(yu_x - u) - xu_y - 4yu + \cos x = 0$ теңдеуі екінші ретті, сызықтық біртекті емес теңдеу.

б) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(u_{xx}^2 + u_{yy}\right) - u_y \dfrac{\partial}{\partial x}(u_y - u_x) - u(u_y + u_x) + u = 0$ теңдеуі үшінші ретті квазисызықтық теңдеу.

в) $u_x^2 + u_y^2 - (u_y - u_x)^2 + 2(u_y + u_x) + u = 0$ теңдеуі бірінші ретті сызықтық емес теңдеу.

1.1.2. Екінші ретті көп айнымалылы дербес туындылы сызықтық дифференциалдық теңдеулер. Типін анықтау және канондық түрге келтіру

Екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеудің жалпы түрі

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) u(x) = f(x) \tag{1.1.3}$$

түрде болады. Мұндағы $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$ және оң жақтағы $f(x)$ функциялары Ω облысында анықталған тегіс, белгілі функциялар. Сонымен қатар $a_{ij}(x)$ коэффиценттері Ω облысында бір уақытта барлығы бірдей нөлге тең емес әрі $a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad i, j = 1, 2, ..., n$.

Екінші ретті сызықтық дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің типін анықтау

Жоғарыдағы (1.1.3) теңдеудің типін анықтау үшін төмендегідей қадамдар жасалады:

1. (1.1.3) теңдеуге сәйкес ондағы айнымалылардың санына қатысты λ_i айнымалылары бойынша

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \lambda_i \lambda_j \tag{1.1.4}$$

квадраттық формасын құрамыз.

2. Әрбір бекітілген $x_0 = \left(x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right) \in \Omega$ нүктеде (1.1.4) квадраттық форманы алгебра курсынан белгілі[1] ерекше емес

$$\begin{cases} \mu_1 = b_{11}\lambda_1 + b_{12}\lambda_2 + ... + b_{1n}\lambda_n \\ \mu_2 = b_{21}\lambda_1 + b_{22}\lambda_2 + ... + b_{2n}\lambda_n \\ .... \\ \mu_n = b_{n1}\lambda_1 + b_{n2}\lambda_2 + ... + b_{nn}\lambda_n \end{cases}$$

немесе матрицалық түрдегі

$$\mu = B\lambda \tag{1.1.5}$$

аффиндік түрлендіруі арқылы канондық түрге келтіруге болады, яғни

$$Q(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) = \sum_{i=1}^{n} q_i \mu_i^2, \quad q_i \in \{-1, 0, 1\}. \tag{1.1.6}$$

Бұл (1.1.6) канондық түрдегі квадраттық форманың коэффициенттері арқылы (1.1.3) теңдеудің типін анықтайды.

---
[1] Сызықты алгебраның элементтері жайлы теорема

Анықтама 1.1.7. *Егер q_i, $i = \overline{1, n}$ коэффициентерінің барлығы бірдей нөлге тең емес және барлығы бір таңбалы болса, онда* (1.1.3) *дифференциалдық теңдеуі Ω облысының x_0 нүктесінде эллипстік типті теңдеу деп аталады.*

Егер q_i, $i = \overline{1, n}$ коэффициентерінің барлығы бірдей нөлге тең емес және біреуі немесе бірнешеуі оң, қалғандары теріс таңбалы болса, онда (1.1.3) *дифференциалдық теңдеуі Ω облысының x_0 нүктесінде гиперболалық типті теңдеу деп аталады.*

Егер q_i, $i = \overline{1, n}$ коэффициентерінің ең болмағанда біреуі нөлге тең болса, онда (1.1.3) *дифференциалдық теңдеуі Ω облысының x_0 нүктесінде параболалық типті теңдеу деп аталады.*

Анықтама 1.1.8. *Егер* (1.1.3) *теңдеу Ω облысының әрбір нүктесінде эллипстік немесе гиперболалық немесе параболалық типті теңдеу болса, онда оны Ω облысында сәйкес эллипстік, гиперболалық немесе параболалық типті теңдеу деп атайды.*

Анықтама 1.1.9. *Егер* (1.1.3) *теңдеуі Ω облысының әр түрлі бөлігінде әр түрлі типке жататын болса, онда оны Ω облысында аралас типті теңдеу деп атайды.*

Мысал 1.1.2. *Келесі дербес туындылы дифференциалдық теңдеудің типін анықтаңыз:*

$$u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} + u_x + u_y = 0.$$

Шешуі. Бұл теңдеудің квадраттық формасын құрып, оны канондық түріне келтіреміз:

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_2^2 + 4\lambda_2\lambda_3 + 5\lambda_3^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 + (\lambda_2 + 2\lambda_3)^2 + \lambda_3^2.$$

Егер бұған $\mu_1 = \lambda_1 + \lambda_2$, $\mu_2 = \lambda_2 + 2\lambda_3$, $\mu_3 = \lambda_3$ белгілеулерін енгізсек, онда канондық түрдегі квадраттық форманы аламыз:

$$Q(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2.$$

Бұл нормалды түрдегі квадраттық формадағы қосылғыштардың саны берілген теңдеудегі айнымалылардың санына тең және олардың коэффициенттері $q_1 = q_2 = q_3 = 1$ бәрі бір таңбалы. Олай болса анықтама бойынша берілген теңдеу эллипстік типті болады.

Бұл мысалдағы түрлендіруші матрица:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Мысал 1.1.3. *Келесі дербес туындылы дифференциалдық теңдеудің типін анықтайық:*

$$2u_{xy} + 2u_{yz} + 4u_{xz} + u_{yy} - u_{zz} + 3u_z + u_y + yu = 0.$$

Шешуі. Бұл теңдеудің квадраттық формасын құрып, канондық түрге келтірелік:

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 2\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_2\lambda_3 + 4\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2 =$$

$$2\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_2\lambda_3 + 2\lambda_1\lambda_3 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + 2\lambda_1\lambda_3 - \lambda_1^2 - 2\lambda_3^2 =$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - (\lambda_1 - \lambda_3)^2 - \lambda_3^2 = \mu_1^2 - \mu_2^2 - \mu_3^2,$$

мұндағы $\mu_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, $\mu_2 = \lambda_1 - \lambda_3$, $\mu_3 = \lambda_3$. Демек, $q_1 = 1$, $q_2 = q_3 = -1$ болғандықтан, теңдеу гиперболалық типті.

Жоғарыдағы (1.1.3) теңдеудің типін келесі әдіспен де анықтауға болады. Ол үшін

$$\det\left(\tilde{Q} - \lambda E\right) = 0 \tag{1.1.7}$$

теңдеуінің түбірлерін табамыз. Мұндағы $\tilde{Q} = \|a_{ij}\|$ – теңдеудің коэффициенттерінен құрылған матрица, ал E– бірлік матрица.

Егер (1.1.7) теңдеудің λ_i, $i = 1, \ldots n$, түбірлерінің барлығы нөлге тең емес және барлығы бірдей бір таңбалы болса, онда (1.1.3) теңдеу эллипстік типті, егер де түбірлерінің барлығы бірдей нөлге тең емес және әр түрлі таңбалы болса, онда теңдеу гиперболалық типті, ал егер түбірлерінің ең болмағанда біреуі нөлге тең болса, онда параболалық типті болады.

Мысал 1.1.4. *Келесі дербес туындылы дифференциалдық теңдеудің типін анықтаңыз:* $u_{xx} - 4u_{yy} + 2u_{xz} + 4u_{yz} + 2u_x + 3u_y - u = 0.$

Шешуі. Мұндағы

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

және

$$\det\left(\tilde{Q} - \lambda E\right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -4-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda\left(9 - 3\lambda - \lambda^2\right) = 0.$$

Бұл теңдеудің түбірлері $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{49}}{2}$, демек, бір түбірі нөлге тең болғандықтан, теңдеу параболалық типті.

Екінші ретті дербес туындылы сызықтық дифференциалдық теңдеулерді канондық түрге келтіру

Екінші ретті, сызықтық, тұрақты коэффициентті теңдеулер облыстың барлық нүктесінде бір типке ие болады. Екінші ретті, сызықтық, тұрақты коэффициентті дербес туындылы дифференциалдық теңдеуді канондық түрге келтіруге байланысты қолданылатын ауыстыру сызықтық түрлендіру түрінде болады. Сондықтан мұндай теңдеулерді канондық түрге келтіру жеңілірек.

Айталық, B – (1.1.2) квадраттық форманы канондық түрге келтіретін сызықтық ерекше емес ($\det|B| \neq 0$) түрлендіруші матрица болсын. Онда (1.1.3) теңдеу

$$\xi = B^T x \tag{1.1.8}$$

түрлендіруі арқылы $x = x_0$ нүктеде

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i(\xi) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i^2} + \Phi\left(\xi, u, ..., \frac{\partial u}{\partial \xi_j}, ...\right) = 0$$

канондық түрге келтіріледі, мұндағы B^T – B матрицасының транспонирленген матрицасы.

Мысал 1.1.5. *Келесі теңдеуді канондық түрге келтіріңіз:*
$u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 2u_{zz} = 0$.

Шешуі. Теңдеуге сәйкес сипаттаушы квадраттық формасын құрып, оны канондық түріне келтірейік:

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_3 + 2\lambda_2^2 + 2\lambda_3^2 =$$

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + 2\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_2\lambda_3 - 2\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + 2\lambda_2\lambda_3 =$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)^2 + (\lambda_2 + \lambda_3)^2.$$

Бұған

$$\begin{cases} \mu_1 = \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3, \\ \mu_2 = \lambda_2 + \lambda_3, \\ \mu_3 = \lambda_3 \end{cases} \tag{1.1.9}$$

белгілеуін енгізсек, онда квадраттық форма

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = q_1\mu_1^2 + q_2\mu_2^2 + q_3\mu_3^2 \tag{1.1.10}$$

канондық түрге келеді. Мұндағы $q_1 = q_2 = 1$, $q_3 = 0$ болғандықтан, теңдеу параболалық типті.

Ал (1.1.9) түрлендіруден $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ тапсақ,

$$\begin{cases} \lambda_1 = \mu_1 - \mu_2 + 2\mu_3 \\ \lambda_2 = \mu_2 - \mu_3 \\ \lambda_3 = \mu_3 \end{cases}$$

болады. Демек, $Q\left(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\right)$ квадраттық формасын (1.1.10) канондық түрге келтіретін матрица

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ал теңдеуді канондық түрге келтіретін транспонирленген матрица

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Олай болса, (1.1.8) бойынша, осы транспонирленген матрица арқылы келесі жаңа ауыстырулар енгіземіз:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \varsigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

немесе $\xi = x$, $\eta = -x + y$, $\varsigma = 2x - y + z$. Бұлардың

$$\xi'_x = 1,\ \eta'_x = -1,\ \varsigma'_x = 2; \quad \xi'_y = 0,\ \eta'_y = 1,\ \varsigma'_y = -1, \quad \xi'_z = 0,\ \eta'_z = 0,\ \varsigma'_z = 1$$

туындаларын анықтап, теңдеудегі енген барлық туындыларды жаңа айнымалылар бойынша ауыстырамыз:

$$\begin{array}{c||lcl}
0 & u_x & = & u_\xi - u_\eta + 2u_\varsigma, \\
0 & u_y & = & u_\eta - u_\varsigma, \\
0 & u_z & = & u_\varsigma; \\
1 & u_{xx} & = & u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 4u_{\varsigma\varsigma} - 2u_{\xi\eta} + 4u_{\xi\varsigma} - 4u_{\varsigma\eta}, \\
2 & u_{xy} & = & -u_{\eta\eta} - 2u_{\varsigma\varsigma} + u_{\xi\eta} - u_{\xi\varsigma} + 3u_{\eta\varsigma}, \\
-2 & u_{xz} & = & u_{\xi\varsigma} - u_{\eta\varsigma} + 2u_{\varsigma\varsigma}, \\
2 & u_{yy} & = & u_{\eta\eta} + u_{\varsigma\varsigma} - 2u_{\varsigma\eta}, \\
2 & u_{zz} & = & u_{\varsigma\varsigma}.
\end{array}$$

Бұларды сәйкес коэффициенттерге көбейтіп қоссақ, нәтижеде

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$$

канондық түрін аламыз. Жауабы: $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$.

1.1.3. Екі айнымалыдан тәуелді дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің типін анықтау және канондық түрге келтіру

Екінші ретті екі айнымалыдан тәуелді дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің жалпы түрі

$$a_{11}u_{xx}\left(x, y\right) + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F\left(x,\ y,\ u,\ u_x,\ u_y\right) = 0 \tag{1.1.11}$$

түрде жазылады, мұндағы $a_{11}(x,y)$, $a_{12}(x,y)$, $a_{22}(x,y)$ – $\Omega \subset R^2$ облысында екі рет үзіліссіз дифференциалданатын функциялар, ал F – өзінің аргументтері бойынша анықталған функция,

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2},\ u_{xy} = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y},\ u_{yy} = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}.$$

.

1. Типін анықтау. Бұл (1.1.11) теңдеудің типін анықтау үшін жоғарыдағы жалпы жағдайда айтылғандай, алдымен оның квадраттық формасын құрамыз

$$Q(\lambda_1,\ \lambda_2) = a_{11}\lambda_1^2 + 2a_{12}\lambda_1\lambda_2 + a_{22}\lambda_2^2.$$

Бұл квадраттық форманың канондық түрі

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$$

шамасына байланысты болады.

Егер $\Delta > 0$ болса, (1.1.11) теңдеу гиперболалық типті, $\Delta = 0$ болса, параболалық типті, ал $\Delta < 0$ болса, онда эллипстік типті болады.
Бұл $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ айырмасы (1.1.11) теңдеудің немесе квадраттық форманың *дискриминанты* деп аталады.

Мысал 1.1.6. *Теңдеудің типін анықтаңыз:*

$$u_{xx} + 4u_{xy} + 3u_{yy} + x\,y + 3u - u_x + 2\,u_y = 0.$$

Шешуі. Мұндағы $a_{11} = 1$, $a_{12} = 2$, $a_{22} = 3$, ал оларға сәйкес дискриминант $\Delta = 2^2 - 1 \cdot 3 = 1 > 0$ оң. Демек, теңдеу гиперболалық типті.

Мысал 1.1.7. *Теңдеудің типін анықтаңыз:*

$$2u_{xx} - 5u_{xy} + 10u_{yy} + 3\,u_x + u_y - u = 0.$$

Шешуі. $a_{11} = 2,\ a_{12} = \frac{5}{2},\ \ a_{22} = 10$, ал $\Delta = \frac{25}{4} - 20 = -\frac{55}{4} < 0$. Теңдеу эллипстік типті.

Мысал 1.1.8. *Теңдеудің типін анықтаңыз:*

$$x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} + u = 0.$$

Шешуі. Мұндағы $a_{11} = x^2,\ a_{12} = xy,\ \ a_{22} = y^2$ және кез келген x және y айнымалылары үшін $\Delta = (xy)^2 - x^2y^2 = 0$. Демек, теңдеу параболалық типті.

Мысал 1.1.9. *Берілген облыста теңдеудің типін анықтаңыз:*

$$xu_{xx}+2\left(x+y\right)u_{xy}+yu_{yy}=0,\qquad \Omega=\left\{(x,y):\ x=1,\ 1\leq y\leq 2\right\}.$$

Шешуі. Алдымен берілген теңдеудің дискриминантын табайық:

$$\Delta=\left(x+y\right)^2-xy=x^2+xy+y^2.$$

Берілген $\Omega=\left\{(x,y):\ \ x=1,\ 1\leq y\leq 2\right\}$ облысында $\Delta=1+y+y^2>0$ болғандықтан, теңдеу гиперболалық типті.

2. Канондық түрге келтіру. Теңдеуді канондық түрге келтіру үшін оның сипаттаушы теңдеуі деп аталатын келесі теңдеуді құрамыз:

$$a_{11}\left(dy\right)^2-2a_{12}dxdy+a_{22}\left(dx\right)^2=0.$$

Бұл теңдеудің екі жағын $\left(dx\right)^2$ бөлсек, онда

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a_{12}\frac{dy}{dx}+a_{22}=0$$

квадрат теңдеуге келеміз және ол өз кезегінде келесі екі жай дифференциалдық теңдеуге жіктелінеді:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2}=\frac{a_{12}\pm\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \tag{1.1.12}$$

Егер $\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0$, яғни теңдеу гиперболалық типті болса, онда (1.1.12) теңдеулердің $\varphi\left(x,y\right)=C_1$ және $\psi\left(x,y\right)=C_2$ екі әр түрлі нақты шешімі болады. Бұлар (1.1.11) теңдеудің екі әр түрлі нақты сипаттауыштар тобын анықтайды және бұл сипаттауыштар арқылы $\xi=\varphi\left(x,y\right),\ \ \eta=\psi\left(x,y\right)$ жаңа айнымалылар енгізсек, онда берілген теңдеу

$$u_{\xi\eta}+\Phi\left(\xi,\,\eta,\,u,\,u_{\xi},\,u_{\eta}\right)=0 \tag{1.1.13}$$

түріндегі канондық түрге келеді. Егер (1.1.13) теңдеуге әрі қарай $\xi_1=\xi+\eta,\ \ \eta_1=\xi-\eta$ жаңа алмастыруын енгізсек, онда ол

$$u_{\xi_1\xi_1}-u_{\eta_1\eta_1}+\Phi_1\left(\xi_1,\,\eta_1,\,u,\,u_{\xi_1},\,u_{\eta_1}\right)=0 \tag{1.1.14}$$

түрдегі екінші канондық түрге келеді.

Егер $\Delta=0$, яғни теңдеу параболалық типті болса, онда (1.1.12) теңдеулердің ортақ $\varphi\left(x,y\right)=C$ бір ғана нақты интегралы болады. Егер теңдеуге $\xi=\varphi\left(x,y\right)$ және Якобианы

$$\frac{D\left(\xi,\eta\right)}{D\left(x,y\right)}=\begin{vmatrix}\varphi_x & \varphi_y\\ \psi_x & \psi_y\end{vmatrix}\neq 0$$

болатындай таңдап алынған кез келген тегіс $\psi(x, y)$ функциясы арқылы $\eta = \psi(x, y)$ алмастыруын енгізсек, онда (1.1.11) теңдеу

$$u_{\xi\xi} + \Phi_2(\xi,\, \eta,\, u,\, u_\xi,\, u_\eta) = 0 \tag{1.1.15}$$

түріндегі канондық түрге келеді.

Егер $\Delta < 0$, яғни теңдеу эллипстік типті болса, онда (1.1.12) теңдеулерінің өзара түйіндес комплекс $\varphi(x, y) \pm i\psi(x, y) = C$ жалпы шешімдері болады. Бұл жағдайда оның нақты бөлігі $\varphi(x, y)$ және жорамал бөлігі $\psi(x, y)$ функциялары арқылы $\xi = \varphi(x, y)\,,\;\; \eta = \psi(x, y)$ алмастыруларын енгізсек, онда (1.1.11) теңдеу

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \Phi_3(\xi,\, \eta,\, u,\, u_\xi,\, u_\eta) = 0 \tag{1.1.16}$$

түріндегі канондық түрге келеді.

Теңдеуді жаңа айнымалылар арқылы өрнектеу үшін $u(x, y)$ функциясы мен оның теңдеуге енген барлық дербес туындыларын

$$\begin{aligned}
&u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x,\\
&u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y,\\
&u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx},\\
&u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy},\\
&u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}
\end{aligned} \tag{1.1.17}$$

формулалары арқылы есептеуге болады.

Мысал 1.1.10. *Теңдеудің типін анықтап, канондық түрге келтіріңіз:*

$$u_{xx} + 4u_{xy} + u_x = 0.$$

Шешуі. Бұл теңдеуде $a_{11} = 1,\; a_{12} = 2,\;\; a_{22} = 0$ болғандықтан $\Delta = 4 > 0$. Демек, теңдеу гиперболалық типті. Теңдеудің сипаттаушы теңдеуі

$$(dy)^2 - 4dxdy = 0$$

болады. Бұл теңдеудің

$$dy - 4dx = 0,\; dy = 0 \;\Rightarrow\;\; y - 4x = C_1,\;\; y = C_2$$

екі нақты сипаттауышы бар. Егер оған $\xi = y - 4x,\;\; \eta = y$ ауыстыруларын енгізсек, онда

$$\xi_x = -4,\;\; \eta_x = 0,\;\; \xi_y = 1,\;\; \eta_y = 1,$$

$$u_x = -4u_\xi,\quad u_y = u_\xi + u_\eta,\quad u_{xx} = 16u_{\xi\xi},\quad u_{xy} = -4u_{\xi\xi} - 4u_{\xi\eta}.$$

Бұларды берілген $u_{xx} + 4u_{xy} + u_x = 0$ теңдеуге қойсақ,

$$16u_{\xi\xi} + 4(-4u_{\xi\xi} - 4u_{\xi\eta}) - 4u_\xi = -16u_{\xi\eta} - 4u_\xi = 0$$

теңдігіне келеміз, яғни теңдеудің канондық түрі

$-16u_{\xi\eta} - 4u_\xi = 0$ немесе $u_{\xi\eta} + \dfrac{1}{4}u_\xi = 0.$

Жауабы: $u_{\xi\eta} + \dfrac{1}{4}u_\xi = 0.$

Мысал 1.1.11. *Теңдеудің типін анықтап, канондық түрге келтіріңіз:*

$$y^2 u_{xx} - 2xyu_{xy} + x^2 u_{yy} = 0.$$

Шешуі: $a_{11} = y^2,\ a_{12} = -xy,\ \ a_{22} = x^2$ және $\Delta = (-xy)^2 - x^2y^2 = 0$ болғандықтан теңдеу параболалық типті және (1.1.12) бойынша сипаттаушы теңдеуін шешсек:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{11}} = \frac{-xy}{y^2} = -\frac{x}{y}$$

$$ydy + xdx = 0 \ \Rightarrow\ \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = C_1, \quad x^2 + y^2 = \bar{C}_1$$

бір ғана сипаттауышы болады және $\xi = x^2 + y^2$. Ал η айнымалысын $\eta = x$ түрде енгізуге болады, себебі $\begin{vmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{vmatrix} = -2y \neq 0,\ \ y \neq 0.$
Бұдан $\xi_x = 2x,\ \ \eta_x = 1,\ \ \xi_y = 2y,\ \ \eta_y = 0$ және (1.1.17) бойынша

$$\begin{aligned}
&u_x = 2xu_\xi + u_\eta,\\
&u_y = 2yu_\xi,\\
&u_{xx} = 2u_\xi + 2x\left(2xu_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}\right) + 2xu_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} = 2u_\xi + 4x^2u_{\xi\xi} + 4xu_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},\\
&u_{xy} = 4xyu_{\xi\xi} + 2yu_{\xi\eta},\\
&u_{yy} = 2u_\xi + 4y^2u_{\xi\xi}.
\end{aligned}$$

Бұларды берілген теңдеуге қойсақ

$$2\left(x^2 + y^2\right)u_\xi + y^2u_{\eta\eta} = 0$$

теңдігіне келеміз. Бұған $\xi = x^2 + y^2$ және $\eta = x$ ауыстыруларын қолданып теңдеудің канондық түрін аламыз:

$$u_{\eta\eta} + \frac{2\xi}{\xi - \eta^2}u_\xi = 0.$$

Мысал 1.1.12. *Теңдеудің типін анықтап, канондық түрге келтіріңіз:*

$$u_{xx} - 6u_{xy} + 13u_{yy} = 0.$$

Шешуі: $a_{11} = 1,\ a_{12} = -3,\ \ a_{22} = 13,\ \Delta = 9 - 13 = -4 < 0$ болғандықтан теңдеу эллипстік типті және

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = -3 \pm 2i,\ \Rightarrow$$

$$dy = (-3 \pm 2i)\,dx \ \ \Rightarrow\ \ y + 3x \pm 2ix = C.$$

Теңдеудің комплекс түйіндес сипаттауыштары болады. Сондықтан

$\xi = y + 3x, \;\; \eta = 2x$ ауыстыруларын қолданамыз. Бұдан

$$\begin{aligned}
&\xi_x = 3, \;\; \eta_x = 2, \;\; \xi_y = 1, \;\; \eta_y = 0, \\
&u_x = 3u_\xi + 2u_\eta; \qquad u_y = u_\xi, \\
&u_{xx} = 9u_{\xi\xi} + 12u_{\xi\eta} + 4u_{\eta\eta}, \\
&u_{xy} = 3u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta}, \\
&u_{yy} = u_{\xi\xi}
\end{aligned}$$

туындыларын тауып, берілген теңдеуге қойсақ,

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$$

канондық түріне келеміз. Жауабы: $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$.

Ескерту 1.1.1. *Егер* (1.1.11) *теңдеу сызықтық әрі коэффициенттері тұрақты болса және оның келтірілген* (1.1.13) *немесе* (1.1.14) *және* (1.1.15), (1.1.16) *канондық түрдегі теңдеулері бірден интегралдап шешімін табуға мүмкін болмайтын ықшамсыз түрде болса, онда оған*

$$u(\xi, \eta) = v(\xi, \eta)\, e^{a\xi + b\eta}$$

алмастыруы көмегімен теңдеуді одан әрі ықшамды түрге келтіруге болады. Мұндағы a және b – нәтижеде алынған теңдеу ықшамды болатындай таңдап алынатын еркін тұрақты сандар. Көбінде оларды гиперболалық және эллипстік жағдайда бірінші ретті дербес туындыларының алдындағы коэффициенттері, ал параболалық типті жағдайда бірінші ретті дербес туындыларының алдындағы коэффициенттерінің біреуі мен $v(\xi, \eta)$ функциясының алдындағы коэффициенті нөлге тең болатындай таңдап алынады.

Мысал 1.1.13. *Теңдеуді канондық түрге келтіріп әрі қарай ықшамдаңыз:*

$$u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} - 3u_x - 15u_y + 27x = 0.$$

Шешуі: $a_{11} = 1, \; a_{12} = \dfrac{1}{2}, \;\; a_{22} = -2$ болғандықтан $\Delta = \dfrac{1}{4} + 2 = \dfrac{9}{4} > 0$ теңдеу гиперболалық типті және сипаттаушы теңдеуінің

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

екі шешімі болады. Бұдан

$$dy = -dx, \quad dy = 2dx \;\; \Rightarrow \;\; y + x = C_1, \quad y - 2x = C_2$$

алғашқы интегралдарын анықтаймыз. Демек, $\xi = x + y, \; \eta = y - 2x$ ауыстыруларын енгіземіз. Бұдан

$$\begin{aligned}
&\xi_x = 1, \;\; \eta_x = -2, \;\; \xi_y = 1, \;\; \eta_y = 1, \\
&u_x = u_\xi - 2u_\eta, \qquad u_y = u_\xi + u_\eta, \\
&u_{xx} = u_{\xi\xi} - 4u_{\xi\eta} + 4u_{\eta\eta}, \\
&u_{xy} = u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta} - 2u_{\eta\eta}, \\
&u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}
\end{aligned}$$

туындыларын тауып, берілген теңдеуге қойсақ, нәтижеде канондық түрін аламыз, яғни

$$\begin{aligned}&u_{xx}+u_{xy}-2u_{yy}-3u_x-15u_y+27x=\\&u_{\xi\xi}-4u_{\xi\eta}+4u_{\eta\eta}+u_{\xi\xi}-u_{\xi\eta}-2u_{\eta\eta}-2\left(u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\right)\\&-3\left(u_\xi-2u_\eta\right)-153\left(u_\xi+u_\eta\right)+27x=0\end{aligned}$$

Бұдан

$$u_{\xi\eta}+2u_\xi+u_\eta-\xi+\eta=0.$$

Бұған әрі қарай $u\left(\xi,\eta\right)=v\left(\xi,\eta\right)e^{a\xi+b\eta}$ ауыстыруын енгізіп және

$$\begin{aligned}&u_\xi=v_\xi e^{a\xi+b\eta}+ave^{a\xi+b\eta},\\&u_\eta=v_\eta e^{a\xi+b\eta}+bve^{a\xi+b\eta},\\&u_{\xi\eta}=v_{\xi\eta}e^{a\xi+b\eta}+bv_\xi e^{a\xi+b\eta}+av_\eta e^{a\xi+b\eta}+abve^{a\xi+b\eta}\end{aligned}$$

туындыларын анықтап, орындарына қоямыз:

$$v_{\xi\eta}e^{a\xi+b\eta}+(b+2)\,u_\xi e^{a\xi+b\eta}+(a+1)\,u_\eta e^{a\xi+b\eta}+(ab+2a+b)\,ve^{a\xi+b\eta}-(\xi-\eta)=0.$$

Теңдеу гиперболалық типті болғандықтан, соңғы теңдіктен $a=-1,\ b=-2$ деп таңдап аламыз (Ескерту. 1.1.1 - ді қараңыз) және екі жағын $e^{a\xi+b\eta}$ қысқартсақ, нәтижеде ықшамдалған түрін аламыз:

$$v_{\xi\eta}-2v-(\xi-\eta)\,e^{\xi+2\eta}=0.$$

1.2 Жаттығу есептері мен жауаптары

1.2.1. Жаттығулар

1.2.1. *Төмендегі теңдеулердің қайсысы дербес туындылы дифференциалдық теңдеу?*

1. $u_{xx}^2+u_{yy}^2-\left(u_{xx}-u_{xx}\right)^2=0.$
2. $\cos\left(u_x+u_y\right)-\cos u_x\cos u_y+\sin u_x\sin u_y+1=0.$
3. $\sin\left(u_{xy}+u_x\right)-\sin u_{xy}\cos u_x-\cos u_{xy}\sin u_x+u-2=0.$
4. $u_{xx}+u_{yy}+\dfrac{\partial}{\partial x}\left(u_y-u_x\right)-\dfrac{\partial}{\partial y}\left(u_x+u_y\right)+u=0.$
5. $u_{xy}+u_{yy}-\dfrac{\partial}{\partial x}\left(u_y-u_x\right)-\dfrac{\partial}{\partial y}\left(u_y+u_x\right)+u=0.$

1.2.2. *Төмендегі теңдеулердің ретін анықтаңыз:*

1. $\cos^2 u_{xy} + \sin^2 u_{xy} - 2u_x^2 - 3u_y + u^3 = 0.$

2. $u_x u_{xy}^2 + \left(u_{xx}^2 - 2u_{xy} + u_y\right)^2 - 2xy = 0.$

3. $u_{xy} + 2u_x u_y + (u_x - u_y)^2 + \sin^2 u_{xx} + \cos^2 u_{yy} = 0.$

4. $u_{xx} - u_{yy} - \dfrac{\partial}{\partial x}(u_{yx} + u_x) + \dfrac{\partial}{\partial y}(u_{xy} + u_y) + u = 0.$

5. $\dfrac{\partial}{\partial y} ctg u_x + cosec u_x - 2u_{xy} + 2\dfrac{\partial}{\partial x}(u + u_y) - 5u = 0.$

1.2.3. *Төмендегі дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің түрін (сызықтық, сызықтық емес, квазисызықтық) анықтаңыз:*

1. $u_{xy}u_{xx} - 3u_{yy} - 6xu_y + xyu = 0.$

2. $a(u, u_x, u_y)u_{xx} + b(x, u_x, u_{xx})u_{xyy} + a(x, y, u)u_{yy} = 0.$

3. $2\sin(x + y)u_{xx} - x\cos y u_{xy} + xyu_x - 3u + 1 = 0.$

4. $u_x u_{xy}^2 + 2xuu_{yy} - 3xyu_y - u = 0.$

5. $2xu_{xy} - 6\dfrac{\partial}{\partial x}\left(u_x^2 - xy\right) + u_{yy} = 0.$

1.2.4. *Төмендегі теңдеулердің типін берілген облыста анықтаңыз:*

1. $(y + 1)u_{xx} - 2u_{xy} + xu_{yy} - u_y = 0, \quad 1 < x < 3, \quad 0 < y < 1.$

2. $xu_{xx} + 2(x + y)u_{xy} + yu_{yy} = 0, \quad x^2 + (y - 1)^2 < 1.$

3. $y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2u_{yy} + yu_x - xu_y = 0, \quad |x| < 1, \quad |y| < 1.$

4. $(x + y)u_{xx} + (x - y)u_{yy} + xu = 0, \quad (x - 5)^2 + y^2 < 1.$

5. $x^2u_{xx} + 2xu_{xy} + u_{yy} + yu_x - u_y = 0, \quad 1 < x^2 + y^2 < 7.$

1.2.5. *Төмендегі теңдеулердің типін анықтап, канондық түрге келтіріңіз.*

1. $u_{xy} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0.$

2. $2u_{xx} + 3u_{xy} + 3u_{yy} + 7u_x + 4u_y - 2u = 0.$

3. $u_{xx} + 4u_{xy} + 13u_{yy} + 3u_x + 24u_y - 9u + 9(x + y) = 0.$

4. $u_{xy} + u_{yy} = 0.$

5. $y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2u_{yy} = 0, \ x \neq 0, \ y \neq 0.$

1.2.6. *Төмендегі теңдеулердің типін анықтап, канондық түрге келтіріңіз.*

1. $4u_{xx} - 4u_{xy} - 2u_{yz} + u_y + u_z = 0.$

2. $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 6u_{zz} = 0.$

3. $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 2u_{zz} = 0.$

4. $u_{xx} + 4u_{yy} + 9u_{zz} + 4u_{xy} + 6u_{xz} + 12u_{yz} - 2u_x - 4u_y - 6u_z = 0.$

5. $u_{xy} + u_{xz} + u_{xt} + u_{zt} = 0.$

1.2.7. *Төмендегі теңдеулердің типін анықтап, канондық түрге келтіріңіз әрі қарай ықшамдаңыз:*

1. $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} - u_x + 2u_y = 0.$

2. $u_{xy} + 2u_{yy} - u_x + 4u_y + u = 0.$

3. $2u_{xx} + 5u_{xy} + 3u_{yy} + 4u_x - 3u_y + 6u = 0.$

4. $u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} + 2u_{yz} + 3u_{zz} - 2u_x + 4u_z - u = 0.$

5. $u_{xy} + u_{xz} + u_{yz} - u_x + u_y = 0.$

1.2.2. Жауаптары

1.2.1. ***1.*** *Дербес туындылы теңдеу.* ***2.*** *Теңдеу емес.* ***3.*** *Алгебралық теңдеу.* ***4.*** *Алгебралық теңдеу.* ***5.*** *Дербес туындылы теңдеу.*

1.2.2. ***1.*** *Бірінші ретті.* ***2.*** *Екінші ретті.* ***3.*** *Екінші ретті.* ***4.*** *Үшінші ретті.* ***5.*** *Екінші ретті.*

1.2.3. ***1.*** *Сызықтық емес.* ***2.*** *Квазисызықтық.* ***3.*** *Сызықтық.* ***4.*** *Сызықтық емес.* ***5.*** *Квазисызықтық.*

1.2.4. ***1.*** *Эллипстік.* ***2.*** *Гиперболалық.* ***3.*** *Параболалық.* ***4.*** *Эллипстік.* ***5.*** *Параболалық.*

1.2.5. ***1.*** *Параболалық,* $\xi = x + y$, $\eta = y$, $u_{\eta\eta} = 0$.
2. *Гиперболалық,* $\xi = y - x$, $\eta = 2y - x$, $u_{\xi\eta} + 3u_\xi - u_\eta + 2u = 0$.
3. *Эллипстік,* $\xi = y - 2x$, $\eta = 3x$, $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 2u_\xi + u_\eta - u + \xi + \eta = 0$.
4. *Гиперболалық,* $\xi = x - y$, $\eta = x$, $u_{\xi\eta} = 0$.
5. *Параболалық,* $\xi = y^2 - x^2$, $\eta = x^2$, $u_{\eta\eta} - \frac{\xi}{2\eta(\xi+\eta)}u_\xi + \frac{1}{2\eta}u_\eta = 0$.

1.2.6. ***1.*** *Гиперболалық,* $\xi = \frac{x}{2}$, $\eta = \frac{x}{2} + y$, $\zeta = -\frac{x}{2} - y + z$,
$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} + u_\eta = 0$.
2. *Эллипстік,* $\xi = x$, $\eta = y - x$, $\zeta = x - \frac{y}{2} + \frac{z}{2}$, $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} = 0$.
3. *Параболалық,* $\xi = x$, $\eta = y - x$, $\zeta = 2x - y + z$, $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$.
4. *Параболалық,* $\xi = x$, $\eta = -2x + y$, $\zeta = -3x + z$, $u_{\xi\xi} - 2u_\xi = 0$.
5. *Ультрагиперболалық,* $\xi = x + y$, $\eta = x - y$, $\zeta = -2y + z + t$, $\tau = z + t$,
$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} - u_{\tau\tau} = 0$.

1.2.7. ***1.*** *Параболалық,* $\xi = x$, $\eta = 3x + y$, $u = ve^{\frac{\xi}{2} - \frac{\eta}{4}}$, $v_{\xi\xi} - v_\eta = 0$.
2. *Гиперболалық,* $\xi = x$, $\eta = -2x + y$, $u = ve^{-6\xi + \eta}$, $v_{\xi\eta} + 7v = 0$.
3. *Гиперболалық,* $\xi = x - y$, $\eta = 3x - 2y$, $u = ve^{7\xi + 18\eta}$, $v_{\xi\eta} - 253v = 0$.
4. *Эллипстік,* $\xi = x - 2y$, $\eta = y + z$, $\zeta = z$, $u = ve^{\xi + 2\eta - 2\zeta}$,
$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + 2v_{\zeta\zeta} - 14v = 0$.
5. *Гиперболалық,* $\xi = x + y$, $\eta = x - y$, $\zeta = -x - y + z$, $u = ve^{-\eta}$,
$v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} - v_{\zeta\zeta} + v = 0$.

2 Бөлім

Математикалық физиканың негізгі есептері

2.1 Математикалық физиканың негізгі теңдеулері

Табиғаттағы көптеген механикалық, физикалық, химия-биологиялық және т.б. құбылыстарды зерттеу көп жағдайда дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді шешуге алып келеді. Мұндай құбылыстарды математикалық тұрғыда зерттеу үшін алдымен физикалық, химиялық, механикалық т.т. заңдылықтар негізінде олардың математикалық моделі (дифференциалдық теңдеуі) құрылады. Әдетте дифференциалдық теңдеулердің шешімдері көп болады. Солардың ішінен қажетті шешімді алу үшін негізгі заңдылықтарға және зерттеліп отырған құбылыстың табиғатына байланысты қосымша шарттар (бастапқы, шекаралық, түйіндес, шенелімдік, периодты, т.б.) қойылады. Теңдеу мен қосымша шарттар бірігіп есепті құрайды. Одан кейін қойылған есепті математикалық түрлі аппараттар арқылы зерттеп, қарастырылып отырған құбылысқа қажетті сұрақтарға математикалық тілде (мәселен, шешімнің бар болуы, жалғыздығы, орнықты болуы және т.б.) жауап беріледі. Бұл курста жоғарыдағы айтылған үш типке жататын математикалық физиканың ең қарапайым үш теңдеуі қарастырылады. Атап айтқанда, гиперболалық типті теңдеулерге жататын толқындық теңдеуі

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \qquad \textbf{(бір өлшемді толқындық теңдеуі)}$$

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, \qquad \textbf{(көп өлшемді толқындық теңдеуі)}$$

параболалық типті теңдеулерге жататын жылуөткізгіштік теңдеуі

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0, \qquad \textbf{(бір өлшемді жылуөткізгіштік теңдеуі)}$$

$$u_t - a^2 \Delta u = 0, \qquad \textbf{(көп өлшемді жылуөткізгіштік теңдеуі)}$$

және эллипстік типті теңдеулерге тиісті Лаплас және Пуассон теңдеулері

$$\Delta u(x,y) := u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad \textbf{(екі өлшемді Лаплас теңдеуі)}$$

$$\Delta u(x,y) := u_{xx} + u_{yy} = f(x,y). \qquad \textbf{(екі өлшемді Пуассон теңдеуі)}$$

Бұл теңдеулерден өзге бұл курс шеңберінде қарастырылмайтын, нақты үдерістерді сипаттайтын сызықтық және сызықтық емес дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер мен теңдеулер жүйесін көптеп келтіруге болады. Мысалы,

$$u_{tt} + bu_t + cu - a^2 u_{xx} = 0, \qquad \textbf{(Телеграф теңдеуі)}$$

$$\Delta u + \lambda u = f(x,y), \qquad \textbf{(Гельмгольц теңдеуі)}$$

$$u_t + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} = 0, \qquad \textbf{(Тасымал теңдеуі)}$$

$$iu_t + \Delta u = 0, \qquad \textbf{(Шрёдингер теңдеуі)}$$

$$-\Delta u = f(u), \qquad \textbf{(Сызықтық емес Пуассон теңдеуі)}$$

$$\rho_t + div\,(\rho \cdot \vec{u}) = 0, \qquad \textbf{(Сұйық ағысының үзіліссіздік теңдеуі)}$$

$$div\left(|Du|^{p-2}\,Du\right) = 0, \qquad \textbf{(}p\textbf{ - Лаплас теңдеуі)}$$

$$u_t + uu_x - u_{xx} = 0, \qquad \textbf{(Бюргерс теңдеуі)}$$

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0, \qquad \textbf{(Кортевега де Фриз (KdV) теңдеуі)}$$

$$u_t - \Delta\left(u^{\gamma}\right) = 0, \qquad \textbf{(Кеуек орта фильтрация теңдеуі)}$$

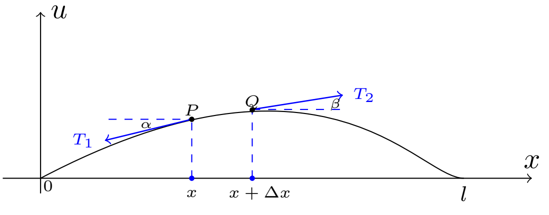
$$\vec{u}_t + (\vec{u} \cdot \nabla)\,\vec{u} + \nabla p = f, \quad div\vec{u} = 0, \qquad \textbf{(Эйлер теңдеуі)}$$

$$\vec{u}_t + (\vec{u} \cdot \nabla)\,\vec{u} - \nu\Delta\vec{u} + \nabla p = \vec{f}(x,t), \quad div\vec{u} = 0. \qquad \textbf{(Навье-Стокс теңдеуі)}$$

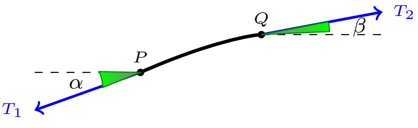
2.1.1. Толқындық теңдеу. Ішектің көлденең тербелісінің теңдеуі

Ұзындығы l - ға тең, екі ұшынан бекітіліп керілген ішектің көлденең ауытқуы аз болатын, яғни ұзындығына қарағанда көлденең ауытқуы өте аз болатын тербелісін қарастырайық. Мұнда *ішек* деп июге қарсы кедергісі жоқ, көлденең қимасының ауданы ұзындығымен салыстырғанда өте аз, солқылдақ жіңішке жіпті (мысалға, домбыраның ішегі) елестетуге болады. Ішектің июге қарсы кедергі күші жоқ болғандықтан t уақыт мезеттегі x нүктесіндегі оның $T(x,t)$ керілу күші сол x нүктедегі жанама бағытымен бағыттас болады.

Айталық, ішек тепе-теңдік қалпында O_{xu} жазықтығында O_x өсінің бойында орналассын (2.1.1-а сурет) және тығыздығы $\rho = const$ тұрақты болсын. Ішек сыртқы $F(x,t)$ күштің әсерінен тепе-теңдік қалпынан көлденең ауытқысын, яғни ішектің әрбір нүктесі O_u өсіне параллелль бағытталып қозғалсын.



2.1.1-а сурет.



2.1.1-ә сурет.

Ішектің x нүктелерінің t уақыт аралығындағы тыныштық күйден көлденең ауытқуы $u(x,t)$ болсын делік. Ішектің көлденең ауытқуы $u(x,t)$ аз тербелісі қарастырылғандықтан $u(x,t)$ және $u_x(x,t)$ - бірінші ретті туындыларының квадраттары және олардың көбейтінділері бұл шамалардың өздерімен салыстырғанда жоғарғы ретті аз шамалар болады. Сондықтан теңдеуді қорытып шығаруда оларды ескермеуге болады, яғни $u^2 \approx u_x^2 \approx uu_x \approx 0$ деп есептейміз.

Ішектің кез келген $[x,\ x+\Delta x]$ бөлігіндегі тербелісті қарастырайық (2.1.1-ә сурет). Бұл аралықтағы шек бөлігінің ұзындығы[1]

$$l_{PQ} = \int\limits_x^{x+\Delta x} \sqrt{1+u_x^2}dx \approx (x+\Delta x) - x = \Delta x.$$

Бұдан көлденең ауытқуы аз тербеліс кезінде ішектің кез келген бөлігінің ұзындығы өзгермейтіндігін көреміз. Олай болса Гукь заңы бойынша $T(x,t)$ керіліс күші уақыт өзгерісінен тәуелсіз болады $T(x,t) = T(x)$.

Екіншіден, ішектің тек көлденең тербелісі қарастырылғандықтан, горизонталь ауытқуы болмайды. Сонымен қатар инерция және

[1] Математикалық анализ курсынан қисық доғаның ұзындығын табуды қараңыз.

сыртқы күштер O_u өсіне параллель болғандықтан олардың горизонталь компоненттері, яғни O_x өсіндегі проекциялары нөлге тең болады:

$$|T_1|\cos\alpha = |T_2|\cos\beta = T_0 = const, \tag{2.1.1}$$

мұндағы $T_1 = T(x)$, $T_2 = T(x + \Delta x)$.

Шындығында, Даламбер қағидасы бойынша барлық әсер етуші күштердің O_x өсіндегі проекцияларының қосындысы нөлге тең болуы тиісті:

$$-|T_1|\cos\alpha + |T_2|\cos\beta = 0. \tag{2.1.2}$$

Бұдан

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}} \approx 1$$

екендігін ескерсек, онда (2.1.2) теңдіктен

$$T(x) \approx T(x + \Delta x)$$

аламыз. Мұндағы x, Δx кез келген болғандықтан, $T(x)$ керіліс күші x айнымалыдан да тәуелсіз, яғни $T(x) = T_0 = const$ тұрақты болады.

Енді теңдеуді қорытып алу үшін *Ньютонның екінші заңын*[2] O_u өсі үшін жазайық

$$T_{1O_u} + T_{2O_u} + F \cdot \Delta x = \rho \cdot \Delta x \cdot u_{tt}$$

немесе

$$-|T_1|\sin\alpha + |T_2|\sin\beta + F \cdot \Delta x = \rho \cdot \Delta x \cdot u_{tt}. \tag{2.1.3}$$

Мұндағы u_{tt} үдеуді, ал $\rho \cdot \Delta x$ массаны береді. Бұл (2.1.3) теңдіктің екі жағын (2.1.1) бойынша $|T_1|\cos\alpha = |T_2|\cos\beta = T_0$ бөлсек:

$$tg\beta - tg\alpha + \frac{F}{T_0}\Delta x = \frac{\rho}{T_0}\Delta x \cdot u_{tt}$$

аламыз. Соңғы теңдікке

$$tg\alpha = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x$$

және

$$tg\beta = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}$$

[2] $ma = F_1 + F_2 + ... + F_k$

жанаманың бұрыштық коэффициенттері екендігін ескеріп және оның екі жағын Δx бөлейік:

$$\frac{u_x\left(x+\Delta x\right)-u_x\left(x\right)}{\Delta x}+\frac{F}{T_0}=\frac{\rho}{T_0}u_{tt}. \tag{2.1.4}$$

(2.1.4) теңдіктен $\Delta x \to 0$ ұмтылдырып ішекке көшсек, нәтижеде

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t) \tag{2.1.5}$$

ішектің көлденең тербелісінің теңдеуін аламыз, мұндағы:

$$a^2=\frac{T_0}{\rho},\;\; f\left(x,t\right)=\frac{1}{\rho}F\left(x,t\right),\;\; \rho=const.$$

(2.1.5) теңдеу *бір өлшемді біртекті емес толқындық теңдеуі* деп аталады. Егер $F\left(x,t\right)=0$ болса, яғни шек сыртқы күштің әсерінсіз тербелетін болса онда ішектің еркін тербелісінің теңдеуін аламыз

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0. \tag{2.1.6}$$

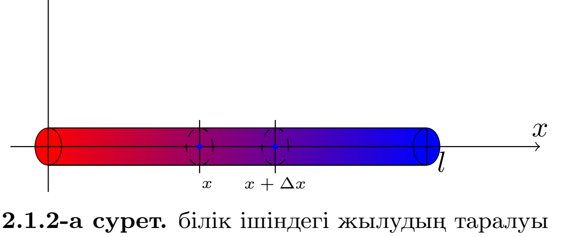
Бұл теңдеу *біртекті толқындық теңдеуі* деп аталады.

Көп өлшемді жағдайда да (мысалы екі өлшемді жағдайда жазық мембрана теңдеуін) осындай жолдармен толқындық теңдеуін қорытып шығаруға болады:

$$u_{tt}-a^2\Delta u\left(x,t\right)=0, \quad x=\left(x_1,x_2,...x_n\right)\in\mathbb{R}^n. \tag{2.1.7}$$

2.1.2. Жылуөткізгіштік теңдеуі

Ұзындығы l - ға тең, біртекті, бүйір бетінен жылу изолирленген жіңішке білік ішіндегі жылудың таралу құбылысын қарастырайық (2.1.2-а сурет). Айталық, білік O_x өсінің бойында орналассын және көлденең қимасының ауданы S – изотермиялық (яғни кез келген уақыт мезетінде көлденең қимасының әрбір нүктесіндегі температурасы бірдей) бет болсын. Сонымен қатар t уақыт мезетіндегі біліктің x қимасындағы температурасы $u\left(x,t\right)$ болсын.



2.1.2-а сурет. білік ішіндегі жылудың таралуы

Әуелі, жылудың таралуына қатысты қажетті физикалық заңдылықтарды келтірейік:

1. Фурье заңы. Егер дене температурасы бірқалыпты болмаса, онда оның ішінде жылу ағыны пайда болады және ол жылу ағыны жоғары температуралы ортадан төменгі температуралы ортаға бағытталып қозғалады. Δt уақыт аралығында S бетінен ағып өтетін жылу мөлшері

$$dQ = qS \cdot \Delta t, \tag{2.1.8}$$

мұндағы

$$q = -k(x)\frac{\partial u}{\partial x}$$

– бірлік уақыт ішіндегі бірлік ауданды қимадан өтетін жылу мөлшері, $k(x)$ – жылуөткізгіштік коэффициент.

2. Біртекті дененің температурасын Δu шамасына өсіру үшін қажетті жылу мөлшері

$$dQ = cm\Delta u = c\rho S\Delta u\Delta x \tag{2.1.9}$$

мұндағы с – үлесті жылу сыйымдылық, m – дене массасы, ρ – тығыздығы.

3. Ішкі белгілі $F(x,t)$ жылу көзінің әсерінен (дене ішінде жылу пайда болуы немесе жұтылуы мүмкін) Δt уақыт ішінде бөлінетін жылу мөлшері:

$$dQ = SF(x,t)\Delta x\Delta t. \tag{2.1.10}$$

4. Энергияның сақталу заңы:

$$Q = Q_1 + Q_3 + ... + Q_k \tag{2.1.11}$$

Қарастырылып отырған құбылыстың теңдеуін қорытып шығару үшін біліктің кез келген аз $[x, x+\Delta x]$ бөлігін қарастырайық. Фурье заңы, яғни (2.1.8) бойынша $[t, t+\Delta t]$ уақыт ішінде аралығында x қимасынан ағып кіретін жылу мөлшері:

$$dQ_1 = -kS\ \Delta t\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x,$$

ал $x+\Delta x$ қимасынан ағып шығатын жылу мөлшері

$$dQ_2 = -\left(-kS\ \Delta t\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}\right) = kS\ \Delta t\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}.$$

Сонымен қатар $[t, t+\Delta t]$ уақыт ішінде ішкі $F(x,t)$ жылу көзінің әсерінен біліктің $[x, x+\Delta x]$ бөлігіне бөлінетін жылу мөлшері (2.1.10) бойынша

$$dQ_3 = SF(x,t)\Delta x\Delta t.$$

Екінші жағынан, $[t, t+\Delta t]$ уақыт ішінде біліктің $[x, x+\Delta x]$ бөлігінің температурасын $\Delta u = u(x, t+\Delta t) - u(x,t)$ шамасына өзгерту үшін жұмсалған жылу мөлшері (2.1.9) бойынша

$$dQ = c\rho S\left(u\left(x, t+\Delta t\right) - u\left(x,t\right)\right)\Delta x.$$

Олай болса, энергияның сақталу заңы (2.1.11) бойынша

$$dQ = dQ_1 + dQ_2 + dQ_3,$$

немесе

$$c\rho S\left(u\left(x, t+\Delta t\right) - u\left(x,t\right)\right)\Delta x = -kS\ \Delta t\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x + kS\ \Delta t\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} + SF\Delta x\Delta t,$$

мұндағы c, ρ, S, k тұрақты шамалар екендігін ескеріп, соңғы теңдіктің екі жағын $S\Delta x\Delta t$ бөлсек

$$\frac{u\left(x, t+\Delta t\right) - u\left(x,t\right)}{\Delta t} = \frac{k}{c\rho}\left(\frac{\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}}{\Delta x}\right) + \frac{1}{c\rho}F(x,t)$$

теңдігін аламыз. Бұл теңдіктен $\Delta x\Delta t \to 0$ ұмтылдырып шек алсақ, нәтижеде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \tag{2.1.12}$$

жылуөткізгіштік теңдеуін аламыз, мұндағы $a^2 = \dfrac{k}{c\rho}$, $f\left(x,t\right) = \dfrac{1}{c\rho}F\left(x,t\right)$.

Егер жылу көзі болмаса, яғни $F\left(x,t\right) = 0$ болса, онда (2.1.12) теңдеуден біртекті жылуөткізгіштік теңдеуі шығады:

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0.$$

Жалпы жағдайда жылуөткізгіштік теңдеуі

$$u_t - a^2\Delta u\left(x,t\right) = f(x,t) \tag{2.1.13}$$

немесе

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = div\left(k\nabla u\right) + f\left(x,t\right), \qquad x = \left(x_1, x_2, ...x_n\right) \in \mathbb{R}^n$$

дивергентті түрде жазылады, мұнда $\Delta u\left(x,t\right) = \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ – Лаплас операторы.

2.1.3. Лаплас теңдеуі (стационар жылу өрісі)

Біртекті материалды дене ішіндегі жылудың таралу процесі жоғарыда қорытылғандай

$$u_t - a^2 \Delta u\,(x,t) = 0,\ x \in \mathbb{R}^n$$

жылуөткізгіштік теңдеуімен сипатталады. Егер процесс стационарлы, яғни жылудың таралуы уақыт өзгеруінен тәуелсіз болса, онда $u_t\,(x,t) = 0$ болғандықтан $u\,(x,t)$ температураның өзгерісі

$$\Delta u\,(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}^n \tag{2.1.14}$$

теңдеуімен сипатталады. Мұндағы Δ:

$$\begin{aligned}
&\Delta u = u_{xx} + u_{yy},\ \ n = 2,\\
&\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz},\ \ n = 3,\\
&\Delta u = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + ... + u_{x_n x_n},\ \ x \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

– Лаплас операторы, ал (2.1.14) теңдеу Лаплас[3] теңдеуі деп аталады.

Егер сыртқы жылу көзі орын алатын болса, онда процесс

$$\Delta u\,(x) = f(x),\ \ x \in \mathbb{R}^n$$

Пуассон теңдеуімен сипатталады.

2.2 Математикалық физика теңдеулеріне қойылатын негізгі есептер

Дифференциалдық теңдеулердің шешімдері әдетте көп болады. Олардың ішінен қажетті шешімді алу үшін оған зерттеліиіп отырған құбылыстың табиғатына байланысты қосымша шарттар қойылады. Математикалық физиканың негізгі теңдеулеріне уақыт бойынша бастапқы шарт (Коши шарты) және кеңістіктік айнымалы бойынша шекаралық (шеттік) шарттар қойылады.

2.2.1. Коши есебі

Егер қарастырылып отырған облыс шенелмеген болса, мәселен, бір өлшемді жағдайда $x \in (-\infty, \infty)$, онда толқындық және жылөткізгіштік теңдеулерінің қажетті шенелген жалғыз шешімін алу үшін оларға бастапқы

[3] PIERRE SIMON LAPLACE (Пьер-Симон Лаплас), (1749 – 1827) – француздық математик, физик әрі астроном. Ол математикалық физикада әсіресе арнайы функциялар және потенциалдар теориясында елеулі еңбектер жасады. Оның атымен Лаплас теңдеуі және Лаплас түрлендіруі аталады. Сонымен қатар оның еңбектері аспан механикасы, ықтималдықтар теориясы, гидродинамика, анализ, дифференциалдық теңдеулер және т.б. салаларда маңызды орын алады.

шарттар (немесе Коши шарты деп аталады) қойылады. (2.1.6) немесе (2.1.7) толқындық теңдеуі үшін бастапқы шарт

$$u(x,\, 0) = \varphi(x)\,, \;\; u_t(x,\, 0) = \psi(x)\,, \quad x \in \mathbb{R} \tag{2.2.15}$$

түрде қойылады. Себебі толқындық теңдеуінде t айнымалы бойынша екінші ретті туынды бар. Ал (2.1.12) немесе (2.1.13) жылуөткізгіштік теңдеуінде t айнымалы бойынша бірінші ретті туынды болғандықтан бастапқы шарт

$$u(x, 0) = \varphi(x)\,, \;\; x \in \mathbb{R} \tag{2.2.16}$$

түрде қойылады. Сонымен, *толқындық теңдеуі үшін Коши есебі* деп

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0,\; x \in \mathbb{R},\; t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x),\; u_t(x,0) = \psi(x),\; x \in \mathbb{R} \end{array} \right. \tag{2.2.17}$$

теңдеулер жүйесін қанағаттандыратын $u(x,t) = C^2(Q) \cap C^{0,1}_{x,t}\left(\bar{Q}\right)$ функциясын табу есебін түсінеміз. Мұндағы $Q = \mathbb{R} \times (t > 0)\,,\; \bar{Q} = \mathbb{R} \times (t \geq 0)\,.$ Ал *жылуөткізгіштік теңдеуі үшін Коши есебі* деп

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t - a^2 u_{xx} = 0,\; x \in \mathbb{R},\; t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \;\; x \in \mathbb{R} \end{array} \right. \tag{2.2.18}$$

теңдеулер жүйесін қанағаттандыратын $u(x,t) = C^{2,1}(Q) \cap C\left(\bar{Q}\right)$ функциясын табу есебін айтамыз. Мұндағы $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – бастапқы немесе Коши берілгендері деп аталатын белгілі функциялар.

Ескерту 2.2.1. *Мұндай шенелмеген облыстарда берілген Коши есебіне $x \to \infty$ кезде $\exists M \in \mathbb{R}$, $|u(x,t)| < M$ шенелімдік шарттарының орындалуы талап етіледі. Әдетте бұл шарт шешімнің анықтамасында айтылатындықтан (шешім - белгілі бір өлшем, метрика бойынша ақырлы) жазылмайды.*

2.2.2. Шекаралық шарттар

Егер қарастырылып отырған Ω облысы шенелген болса, мәселен, бір өлшемді жағдайда $\Omega = [0,\, l]$ кесіндісі, онда шешімнің шекарасындағы мәндері туралы шекаралық шарттар қойылады. Шекаралық шарттар үш түрде қойылады.

Анықтама 2.2.1. *Бірінші текті шекаралық шарт немесе Дирихле*[4] *шарты деп $S = \partial\Omega$ шекарада $u(x,t)$ функциясының мәні берілген*

$$u(x,t)|_{\partial\Omega} = \mu(t)\,, \quad t > 0 \tag{2.2.19}$$

түрдегі шартты айтады.

[4]JOHANN PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET (Иоганн Петер Густав Лежён-Дирихле) (1805 - 1859) – неміс математигі. Негізгі жұмыстары сандар теориясы мен математикалық анализ курсына бағытталған. Сонымен қатар оның механикада, математикалық физикада маңызды еңбектері бар.

Анықтама 2.2.2. *Екінші текті шекаралық шарт немесе Нейман*[5] *шарты деп шекарада* $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ *туындысының мәні берілген*

$$\left.\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=\nu\left(t\right), \quad t>0 \tag{2.2.20}$$

түрдегі шартты айтады.

Анықтама 2.2.3. *Үшінші текті шекаралық шарт деп шекарада* $u(x,t)$ *функциясы мен* $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ *туындысының мәндерін байланыстырып қойылған*

$$\left.\left(\alpha u\left(x,t\right)+\beta\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial n}\right)\right|_{\partial\Omega}=\chi\left(t\right), \quad t>0 \tag{2.2.21}$$

түрдегі шартты айтады. Мұндағы α,β – $\alpha^2+\beta^2\neq 0$ *шартын қанағаттандыратын белгілі сандар.*

Егер шекарадағы мәндері ($\mu(t)$, $\nu(t)$, $\chi(t)$ функциялары) нөлге тең болса, онда шекаралық шарттар *біртекті*, ал кері жағдайды *біртекті емес* деп аталады.

Жоғарыдағы (2.2.19)-(2.2.21) шарттар $n=1$ болғанда сәйкес келесі түрде өрнектеледі:

$$u\left(0,t\right)=\mu_1\left(t\right), \ \ u\left(l,t\right)=\mu_2\left(t\right), \quad x\in\left[0,l\right];$$

$$u_x\left(0,t\right)=\nu_1\left(t\right), \ \ u_x\left(l,t\right)=\nu_2\left(t\right), \quad x\in\left[0,l\right];$$

$$\alpha_1 u\left(0,t\right)+\beta_1 u_x\left(0,t\right)=\chi_1\left(t\right), \ \ \alpha_2 u\left(l,t\right)+\beta_2 u_x\left(l,t\right)=\chi_2\left(t\right), \ \ x\in\left[0,l\right].$$

Ескерту 2.2.2. *Үшінші шекаралық шарт жалпы түрдегі шекаралық шарт болып есептеледі, себебі* $\alpha=0$ *болса, екінші шекаралық шартты, ал* $\beta=0$ *болса, бірінші шекаралық шартты аламыз.*

Ескерту 2.2.3. *Ішектің тербелісі үшін бірінші шекаралық шарттың мағынасы екі ұшы қатты бекітілген ішектің, екінші шекаралық шарт екі ұшы бос, ал үшінші шекаралық шарт екі ұшы серпімді бекітілген ішектің тербелісін белдіреді.*

Ескерту 2.2.4. *Жылуөткізгіштік теңдеуі үшін бірінші шекаралық шарттың мағынасы дененің бүйір бетінің температурасы белгілі болған, екінші шекаралық шарт шекарасы жылуизолирленген, ал үшінші шекаралық шарт шекарасында сыртқы ортамен жылу алмасу орын алатындығын білдіреді.*

[5] CARL NEUMANN (Карл Нейман) (1832 - 1925) – неміс математигі әрі физигі. Оның негізгі жұмыстары дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер (потенциалдар теориясы, екінші шеттік есеп), интегралдық теңдеулер және алгебралық функцияларды зерттеуге арналған. Сонымен қатар оның механика, электродинамика, гидродинамика саласында да маңызды еңбектері бар.

2.2.3. Бастапқы-шеттік есептер

Лаплас және Пуассон теңдеулері стационар теңдеулер болғандықтан оларға тек жоғарыдағы үш шекаралық шарттың біреуі қойылады. Мұндай шекаралық шартпен берілген есептер *шекаралық (шеттік) есептер* деп аталады. Ал жылуөткізгіштік немесе толқындық теңдеулерін шенелген облыстарда бірмәнді шешу үшін оларға сәйкес (2.2.15), (2.2.16) бастапқы шарттарға қоса (2.2.19)-(2.2.21) шекаралық шарттардың бірі қосылып қойылады. Мұндай есептер *бастапқы-шеттік* немесе *аралас есеп* деп аталады.

1. Бір өлшемді толқындық теңдеуі үшін бастапқы-шеттік есептің қойылымы:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0\,, \quad 0 < x < l,\ t > 0, \\ u\,(x, 0) = \varphi\,(x)\,,\ u_t\,(x, 0) = \psi\,(x)\,, \quad 0 \le x \le l, \\ u\,(0, t) = \mu\,(t)\,,\ u\,(l, t) = \nu\,(t)\,, \quad t \ge 0 \end{cases}$$

теңдеулер жүйесін қанағаттандыратын $u\,(x, t) \in C^{2,2}_{x,t}\,(Q_t) \cap C^{0,1}(\overline{Q_t})$ шешімін табу керек. Мұндағы φ, ψ, μ, ν – белгілі, үзіліссіз және

$$\varphi\,(0) = \mu\,(0)\,,\ \varphi\,(l) = \nu\,(0)\,,\ \psi\,(0) = \mu'\,(0)\,, \psi\,(l) = \nu'\,(0)$$

үйлесімділік шарттарын қанағаттандыратын функциялар.

2. Бір өлшемді жылуөткізгіштік теңдеуі үшін бірінші бастапқы-шеттік есептің қойылымы:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0\,,\ 0 < x < l,\ t > 0, \\ u\,(x, 0) = \varphi\,(x)\,, \quad 0 \le x \le l, \\ u\,(0, t) = \mu\,(t)\,,\ u\,(l, t) = \nu\,(t)\,, \quad t \ge 0 \end{cases}$$

теңдеулер жүйесін қанағаттандыратын $u\,(x, t) \in C^{2,1}_{x,t}\,(Q_t) \cap C(\overline{Q_t})$ шешімін табу керек. Мұндағы φ, μ, ν – белгілі, үзіліссіз және

$$\varphi\,(0) = \mu\,(0)\,,\ \varphi\,(l) = \nu\,(0)$$

үйлесімділік шарттарын қанағаттандыратын функциялар.

3. Лаплас теңдеуі үшін бірінші шеттік немесе Дирихле есебінің қойылымы:

$$\begin{cases} \triangle u(x) = 0\,,\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ u\,(x) = \varphi\,(x)\,, \quad x \in S = \partial\Omega \end{cases}$$

теңдеулер жүйесін қанағаттандыратын $u\,(x, t) \in C^2\,(\Omega) \cap C(\partial\Omega)$ шешімін табу керек.

Дәл осы сияқты толқындық теңдеуі үшін (2.1.7), (2.2.15), (2.2.20) және (2.1.7), (2.2.15), (2.2.21), жылуөткізгіштік теңдеуі үшін (2.1.13), (2.2.16), (2.2.20) және (2.1.13), (2.2.16), (2.2.21) екінші және үшінші бастапқы - шекаралық есептерінің, Лаплас теңдеуі үшін (2.1.14), (2.2.20) және (2.1.14), (2.2.21) екінші (Нейман) және үшінші шеттік есептерінің қойылымын алуға болады.

2.2.4. Математикалық физика есептерінің қисынды қойылуы

Математикалық физика есептері нақты құбылыстарды сипаттайтындықтан, физикалық, математикалық мағынасына байланысты олардың қисынды және қисынсыз қойылу ұғымдары енгізіледі.

Анықтама 2.2.4. *Егер қарастырылып отырған кеңістікте қойылған математикалық есептің*

- *шешімі бар болса;*
- *шешімі жалғыз болса;*
- *шешімі орнықты болса, онда есеп қисынды қойылған деп аталады.*

Есептің шешімінің орнықты болуы дегеніміз шешімінің есептің бастапқы берілгендерінен (шекаралық функциядан, бастапқы шарттағы функциядан, теңдеудің оң жағынан және т.б.) үздіксіз тәуелді болуы, яғни есептің берілгендерінің аз өзгеріске енуінен шешімнің айтарлықтай үлкен өзгеріске ұшырамауын түсінеміз.

Егер жоғарыдағы үш шарттың біреуі орындалмаса, онда есеп қисынды емес деп аталады. Математикалық физика есептерінің (жоғарыдағы анықталған мағынада) қисынды қойылу ұғымын алғаш енгізген француздық ғалым – Жак Адамар[6].

Алайда қисынды қойылған есептермен қатар қисынды емес есептер де жиі кездеседі. Сондай қисынды қойылмаған есептердің бірі – Адамар мысалы деп аталатын төмендегі Лаплас теңдеуіне қойлған Коши есебі:

$$\begin{aligned}&\Delta u(x,y)=u_{xx}+u_{yy}=0, \quad 0<x<\infty,\ -\infty<y<\infty,\\ &u(0,y)=f(y), \quad u_x(0,y)=g(y), \quad -\infty<y<\infty.\end{aligned}$$

Егер $f_1(y)=0,\ \ g_1(y)=0$ деп алсақ, онда оларға сәйкес шешім $u_1(x,y)=0$ функциясы, ал $f_2(y)=\dfrac{1}{n}\sin ny, \quad g_2(y)=0$ деп алсақ, онда шешім

$$u_2(x,y)=\frac{1}{n}\sin ny\cosh nx$$

функциясы болатынын тексеру қиын емес.

Шешім үзіліссіз функциялар класынан (классикалық шешім) ізделінгендіктен, есептің бастапқы берілгендерінің өзгерісін C кеңістігінің метрикасы бойынша есептейміз:

$$\rho\left(g_1,g_2\right)=0, \quad \rho\left(f_1,f_2\right)=\max\left|-\frac{1}{n}\sin ny\right|=\frac{|\sin ny|}{n},$$

[6]JACQUES HADAMARD (1865–1963) француз ғалымы. Оның қатарлар теориясында және дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер теориясында маңызды еңбектері бар.

яғни жеткілікті үлкен n мәндері үшін $\rho\left(f_1, f_2\right)$ жеткілікті аз шама болады. Ал оларға сәйкес шешімдер өзгерісі

$$\rho\left(u_1, u_2\right)=\max \left|-\frac{1}{n} \sin n y \cosh n x\right|=\frac{|\sin n y|}{n} \cosh n x$$

жеткілікті үлкен n үшін шексіз үлкен шама болады, себебі $x>0$ үшін

$$|\sin n y| \leq 1, \quad \frac{\cosh n x}{n}=\frac{e^{n x}+e^{-n x}}{n} \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty .$$

Демек, шешім орнықсыз. Олай болса, қисынды қойылудың үшінші шарты орындалмағандықтан, есеп қисынды емес.

Міне, осы тәрізді қисынды емес қойылған есептерге мысалдарды көптеп келтіруге болады. Бұл оқу құралында қарастырылатын барлық есептер қисынды қойылған.

2.3 Жаттығу есептері мен жауаптары

2.3.1. Жаттығулар

Жоғарыдағы әдістерді қолданып, келесі есептерді шешіңіздер:

2.3.1. *Бір ұшында Дирихле, екінші ұшында Нейман шарты берілген ұзынды l-ге тең шектің еркін тербелісін анықтау есебінің қойылымын келтіріңіз. Шекің бастапқы жылдадығы мен ауытқуы сәйкес $\varphi(x)$, $\psi(x)$ белгілі тегіс функциялар. Классикалық шешім класын анықтап, үйлесімділік шарттарын жазыңыз.*

2.3.2. *Біртекті емес жылуөткізгіштік теңдеуі үшін Дирихле шартымен берілген бастапқы-шеттік есептің қойылымын келтіріңіз. Классикалық шешімінің класын анықтап, үйлесімділік шарттарын жазыңыз.*

2.3.3. *Тіктөртбұрышта берілген Лаплас теңдеуі үшін Нейман есебінің қойылымын келтіріңіз. Классикалық шешімінің класын анықтап, үйлесімділік шарттарын жазыңыз.*

2.3.4. *Бір ұшы мықтап бекітілген шексіз ұзын ішектің еріксіз тербелісін анықтау есебінің қойылымын келтіріңіз. Ішекің бастапқы жылдадығы мен ауытқуы сәйкес $\varphi(x)$, $\psi(x)$ белгілі.*

2.3.5. *Шеттері мықтап бекітілген жазық мембрана сыртқы белгілі $F(M,t)$ күштің әсерінен тербеліс жасайды. $\Phi(M)$ – бастапқы жылдадығы мен $\Psi(M)$ – ауытқуы белгілі болған кездегі жазық мембрананың тербелсін анықтау есебінің қойылымын келтіріңіз.*

2.3.6. *Ұзындығы l $(0 \leq x \leq l)$, тығыздығы $\rho=\rho(x)$ сызықты болатын ішек $O_{x,u}$ жазықтығында көлденең тербеліс жасайды. Ішекің көлденең тербелісі $u(x,t)$ деп алып, ішектің*

а) ешбір бекітілген массалары болмаған жағдайдағы;
ә) әрбір x_i нүктелерінде m_i, $i = 1, ..., n$ массалары бекітілген жағдайдағы
K кинетикалық энергиясын анықтаңыз.

2.3.7. *Ұзындығы l $(0 \leq x \leq l)$ тең ішек $O_{x,u}$ жазықтығында көлденең тербеліс жасайды. Ішекің көлденең тербелісі $u(x,t)$ деп алып, ішектің*
а) ұштары тербелмейтіндей бекітілген жағдайдағы;
ә) ұштары тербелмейтіндей бекітілген және u_x - тің екінші дәрежесінен жоғарғыларын есептемеуге болатын жағдайдағы
U потенциалдық энергиясын анықтаңыз.

2.3.8. *Бүйір беті изоляцияланған, ұзындығы l - ге тең $(0 \leq x \leq l)$ біртекті біліктің бастапқы температурасы – $\varphi(x)$ $(t = 0)$. Біліктің ұштары жылуизоляцияланған жағдайдағы білік ішіндегі $u(x,t)$, $t > 0$ температураны анықтайтын есептің қойылымын келтіріңіз.*

2.3.9. *Бүйір беті изоляцияланған, ұзындығы l - ге тең $(0 \leq x \leq l)$ біртекті біліктің бастапқы температурасы – $\varphi(x)$ $(t = 0)$. Біліктің $x = 0$ және $x = l$ ұштарында бастапқы $t = 0$ уақыт мезетінен бастап сәйкес $q(t)$ және $p(t)$ жылу ағындары орын алатын болса, білік ішіндегі $u(x,t)$, $t > 0$ температураны анықтайтын есептің қойылымын келтіріңіз.*

2.3.10. *Көлденең қимасы тұрақты S, ұзындығы l - ге тең іші газ өткізетін (кеуек) заттармен біртекті толтырылған түтік ішінде газ диффузиясы орын алады. Түтіктің бүйір беті газ өткізбейді және $t = 0$ уақыт мезеттегі газдың бастапқы концентрациясы $\varphi(x)$ - ге тең. Түтіктің $t = 0$ уақыт мезетінен бастап $x = 0$ ұшындағы газ концентрациясы $\mu(t)$ тең, ал $x = l$ ұшы газ өткізбейтін болса, кез келген $t > 0$ уақыт мезетіндегі түтік ішіндегі $u(x,t)$ газ концентрацияны анықтайтын есептің қойылымын келтіріңіз.*

2.3.11. *Біртекті изотропты стержін ішінде еркін жылу алмасуы орын алады. Бастапқы температурасы $\varphi(x)$ $(t = 0)$ және біліктің $x = 0$ ұшындағы температура u_0 тұрақты, ал $x = l$ ұшында температурасы $q(t)$ заңы бойынша сыртқы ортамен жылу алмасатын жағдайдағы білік ішіндегі жылудың таралуын анықтайтын есептің қойылымын келтіріңіз.*

2.3.12. *Кедергі күші ауытқуға пропорционал ортадағы ұзындығы l-ге тең шектің көлденең тербелісінің теңдеуін қорытып шығарыңыз.*

2.3.13. *Біртекті, көлденең қимасының ауданы $S(x)$-ке тең серпімді біліктің бойлық тербелісінің теңдеуін қорытып шығарыңыз.*

2.3.14. *Біртекті шар ішінде $t = 0$ уақыт мезетінен бастап біркелкі таралатын тұрақты q жылу көзі әсер етеді. Шардың кез келген нүктесіндегі бастапқы температура мәні сол нүктеден шардың центріне дейінгі арақашықтықтан ғана тәуелді. Төмендегі жағдайлардағы шар ішіндегі кез келген $t > 0$ уақыт мезетіндегі жылудың таралуын*

сипаттайтын есептің қойылымын келтіріңіз:
а) Шар бетінің температурасы нөлге тең болса;
ә) Шар бетінде Ньютон заңы бойынша нөлдік температуралы сырты ортамен жылу алмасуы орын алады.

2.3.15. *Радиусы R жарты шардың табанының температурасы нөлге тең, ал сфералық беттің температурасы $f(\varphi, \theta)$ белгілі болса, онда жарты шардың ішкі нүктелерінің температурасын анықтайтын есепті қойыңыз.*

2.3.2. Жауаптары

2.3.1. $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \ \ 0 < x < l, \ \ t > 0, \\ u(0,t) = \nu(t), \quad u_x(l,t) = \mu(t), \ \ t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \ \ u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l. \end{cases}$

$u(x,t) \in C^{2,2}_{x,t}(0 < x < l, \, t > 0) \cap C^{1,1}_{x,t}(0 \leq x \leq l, \, t \geq 0)$ *функциясын табу, мұндағы* $\nu(0) = \varphi(0), \ \nu'(0) = \psi(0), \ \mu(0) = \varphi'(l), \ \mu'(0) = \psi'(l)$.

2.3.2. $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \ \ 0 < x < l, \ \ t > 0, \\ u(0,t) = \nu(t), \quad u(l,t) = \mu(t), \ \ t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x) \quad 0 \leq x \leq l. \end{cases}$

$u(x,t) \in C^{2,1}_{x,t}(0 < x < l, \, t > 0) \cap C(0 \leq x \leq l, \, t \geq 0)$ *функциясын табу, мұндағы* $\nu(0) = \varphi(0), \ \mu(0) = \varphi(l)$.

2.3.3. $\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, \ \ 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ u_y(x,0) = \varphi_0(x), \ u_y(x,b) = \psi_0(x), \ 0 \leq x \leq a, \\ u_x(0,y) = \varphi_1(y), \ u_x(a,y) = \psi_1(y), \quad 0 \leq y \leq b, \end{cases}$

$u(x,y) \in C^2(0 < x < a, \quad 0 < y < b) \cap C^1(0 \leq x \leq a, \, 0 \leq y \leq b)$ *функциясын табу, мұндағы* $\varphi_0'(0) = \varphi_1'(0), \ \psi_0'(a) = \psi_1'(b), \ \varphi_0'(a) = \psi_1'(0), \ \psi_0'(0) = \varphi_1'(b)$.

2.3.4. $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \ \ x > 0, \ \ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \qquad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \ \ u_t(x,0) = \psi(x), \quad x > 0, \end{cases}$

мұндағы $f(x,t)$ *– сыртқы әсер етуші күш.*

2.3.5. $\begin{cases} u_{tt} = a^2 \triangle u(M,t) + F(M,t), \ \ M(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \ t > 0, \\ u(M,0) = \Phi(M), \ \ u_t(M,0) = \Psi(M), \quad M(x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$

2.3.6. *а)* $K = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^l \rho(x) u_t^2(x,t)dx$;

ә) $K = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^l \rho(x) u_t^2(x,t)dx + \dfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i u_t^2(x_i,t)$.

2.3.7. *а)*$U = T \displaystyle\int_0^l \left(\sqrt{1 + u_x^2(x,t)} - 1\right)dx$; *ә)*$U = \dfrac{T}{2} \displaystyle\int_0^l u_x^2(x,t)dx$.

2.3.8.
$$\begin{aligned} &su_t = a^2\frac{\partial}{\partial x}\left(s\frac{\partial u}{\partial x}\right), \ \ 0<x<l, \ \ t>0,\\ &u_x\left(0,t\right) = u_x\left(l,t\right) = 0, \quad t>0,\\ &u\left(x,0\right) = \varphi(x), \ \ 0<x<l, \quad a^2 = \frac{k}{c\rho}. \end{aligned}$$

2.3.9.
$$\begin{aligned} &su_t = a^2\frac{\partial}{\partial x}\left(s\frac{\partial u}{\partial x}\right), \ \ 0<x<l, \ \ t>0,\\ &u_x\left(0,t\right) = -\frac{1}{ks(0)}q(t), \quad u_x\left(l,t\right) = \frac{1}{ks(l)}p(t), \quad t>0,\\ &u\left(x,0\right) = \varphi(x), \ \ 0<x<l, \quad a^2 = \tfrac{k}{c\rho}. \end{aligned}$$

2.3.10.
$$\begin{aligned} &u_t = a^2u_{xx}, \ \ 0<x<l, \ \ t>0,\\ &u\left(0,t\right) = \mu(t), \quad u_x\left(l,t\right) = 0, \quad t>0,\\ &u\left(x,0\right) = \varphi(x), \ \ 0<x<l, \quad a^2 = \tfrac{\alpha D}{c}, \end{aligned}$$

мұндағы α – қиманың кеуектік коэффициенті, яғни қимадағы кеуек ауданының осы қима ауданына қатынасы.

2.3.11.
$$\begin{aligned} &u_t = a^2u_{xx}, \ \ 0<x<l, \ \ t>0,\\ &u\left(0,t\right) = u_0, \quad u_x\left(l,t\right) + \gamma\left[u\left(l,t\right) - q(t)\right] = 0, \quad t>0,\\ &u\left(x,0\right) = \varphi(x), \ \ 0<x<l, \quad a^2 = \tfrac{T}{\rho}. \end{aligned}$$

2.3.12. $\rho u_{tt} = Tu_{xx} - ku, \ \ 0<x<l, \ \ t>0,$ *мұндағы* k *кедергі коэффициенті.*

2.3.13. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(S(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad a^2 = \tfrac{\rho S}{E}.$

2.3.14.
$$\begin{cases} u_t = a^2\left(u_{rr} + \dfrac{2}{r}u_r\right) + \dfrac{q}{c\rho}, \quad 0\le r<R, \ \ t>0,\\ u\left(0,t\right) = \varphi(r), \quad 0\le r\le R, \quad |u(0,t)|<\infty;\\ а). \quad \left.|u|\right|_{r=R} = 0;\\ ә). \quad \left.(u_r + hu)\right|_{r=R} = 0, \quad h = \tfrac{\alpha}{k}, \quad a^2 = \tfrac{k}{c\rho}. \end{cases}$$

2.3.15.
$$\begin{cases} \triangle u = 0, \quad 0\le r<R, \ \ 0<\theta<\tfrac{\pi}{2}, \quad 0<\varphi<2\pi,\\ \left.|u|\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0, \quad \left.u\right|_{r=R} = f\left(\varphi,\theta\right). \end{cases}$$

3 Бөлім

Математикалық физика теңдеулері үшін Коши есебі

3.1 Гиперболалық типті теңдеулер үшін жалпылама Коши және Гурса есебі. Сипаттауыштар әдісі

Жай дифференциалдық теңдеулер курсынан, егер дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі белгілі болса онда қандай да бір шарттармен қойылған есептерді, мәселен, Коши есебін шешуге болатындығын білеміз. Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін де теңдеудің жалпы шешімі белгілі болса, онда қандай да бір қойылған қосымша шарттарды қанағаттандыратын есептерін шешуге болады.

Бұл бөлімде сипаттауыштар әдісі арқылы дербес туындылы теңдеулердің жалпы шешімін табуды және гиперболалық типті теңдеулер үшін Коши[1] және Гурса есептерін қарастырамыз.

3.1.1. Жалпы шешім. Сипаттауыштар әдісі

Алдыңғы 1.2 - бөлімде біз берілген дербес туындылы теңдеулерді олардың сипаттауыш қисықтары арқылы канондық түрге келтіруді қарастырдық. Канондық теңдеулерді әрі қарай түрліше әдістерімен интегралдап, олардың шешімдерін еркін функциялар арқылы өрнектеуге болады. Мұндай жолмен теңдеудің шешімін табуды сипаттауыштар әдісі деп, ал еркін түрдегі функциялар арқылы өрнектелген шешімді теңдеудің жалпы шешімі деп атайды.

[1] AUGUSTIN LOUIS CAUCHY (Огюстен Луи Коши) (1789-1857) – француз математигі. Оның еңбектері математиканың әр түрлі саласына қатысты. Атап айтқанда математикалық анализ, комплекс айнымалы функциялар теориясы, жай дифференциалдық және математикалық физика теңдеулері (бастапқы шартты шеттік есептер), геометрия, сандар теориясы, алгебра, астрономия, оптика және т.б. ғылым саласында маңызды зерттеулері бар. Ол – сонымен қатар алғаш серпімділік теориясының математикалық негізін қалады.

Мысал 3.1.1. *Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:*

$$u_{xx} - u_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0.$$

Шешуі. Алдымен теңдеудің типін анықтап, канондық түрге келтіреміз. $\Delta = 1 > 0$ гиперболалық типті теңдеу және сипаттауыш қисықтары:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad dy = \pm dx \quad \Rightarrow \quad y = x + c_1, \;\; y = x + c_2.$$

Бұл сипаттауыштар арқылы

$$\xi = y - x, \quad \eta = y + x$$

белгілеулерін енгіземіз. Теңдеудегі

$$u_x = -u_\xi + u_\eta,$$

$$u_y = u_\xi + u_\eta,$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

дербес туындыларын жаңа айнымалылар бойынша өрнектеп, оларды берілген теңдеуге қойып, ықшамдасақ, нәтижеде

$$u_{\xi\eta} - u_\eta = 0$$

канондық теңдеуін аламыз. Бұған $u_\eta = v$ белгілеу енгізсек,

$$v_\xi - v = 0$$

теңдеуін аламыз. Егер η айнымалысын параметр ретінде қарастырсақ, бұл теңдеу бірінші ретті біртекті сызықтық жай дифференциалдық теңдеу болады және оның жалпы шешімі

$$v = \varphi(\eta)\, e^{\xi},$$

мұндағы $\varphi(\eta)$ функциясы – η айнымалыдан ғана тәуелді еркін функция. Демек,

$$u_\eta = \varphi(\eta)\, e^{\xi}.$$

Мұны ξ айнымалысын параметр ретінде қарастырып, η айнымалысы бойынша интегралдасақ:

$$u(\xi, \eta) = e^{\xi} \int \varphi(\eta)\, d\eta + \psi(\xi) = e^{\xi} g(\eta) + \psi(\xi)$$

шешімін аламыз. Мұндағы $g(\eta) \equiv \displaystyle\int \varphi(\eta)\, d\eta$, $\psi(\xi)$ функциялары – сәйкес η, ξ айнымалыларынан тәуелді еркін функциялар. Бұған жоғарыдағы белгілеуді пайдаланып, x, y айнымалылары бойынша теңдеудің жалпы шешімін анықтаймыз:

$$u(x, y) = e^{y-x} g(y + x) + \psi(y - x).$$

3.1.2. Жалпылама Коши есебі

Айталық, $\Omega \in \mathbb{R}^2$ облысында гиперболалық типті

$$Lu \equiv a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+b_1\frac{\partial u}{\partial x}+b_2\frac{\partial u}{\partial y}+cu(x,y)=F(x,y) \quad (3.1.1)$$

теңдеуі берілсін. Мұндағы $a_{11},\ a_{12},\ a_{22},\ b_1,\ b_2,\ c$ коэффициенттері x және y айнымалылардан тәуелді берілген тегіс функциялар және $\forall(x,y)\in\Omega$ үшін $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$. Сонымен қатар Ω облысында жататын немесе оның $\partial\Omega$ шекарасының бір бөлігі болатын әрі жанама бағыттауыштары (3.1.1) теңдеудің сипаттауыштарымен беттеспейтін қандай да бір $\Gamma \in \overline{\Omega}$ тегіс қисығы берілсін. Осы Γ тегіс қисығында $\varphi(x,y)$ және $\psi(x,y)$ функциялары және Γ қисығының жанама бағыттауыштары болмайтын l бағыттаушы берілсін.

Коши есебінің қойылымы: Ω облысында (3.1.1) теңдеуді, ал Γ қисығының бойында

$$u(x,y)|_\Gamma = \varphi(x,y), \quad \left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial l}\right|_\Gamma = \psi(x,y), \quad (x,y)\in\Gamma \qquad (3.1.2)$$

шарттарын қанағаттандыратын $u(x,y)$ функциясын табу керек.

Теорема 3.1.1. *Егер* (3.1.1) - *теңдеудің коэффициенттері және* $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$, $F(x,y)$ *функциялары жеткілікті тегіс болса, онда* Γ *қисығының ұштарынан өтетін* (3.1.1) - *теңдеуінің сипаттауыштарымен шектелген* Ω *облысында* (3.1.1)-(3.1.2) *Коши есебінің шешімі бар және жалғыз болады.*

Мысал 3.1.2. *Коши есебінің шешімін табыңыз:*

$$u_{xx}-u_{yy}+2u_x+2u_y=0,\ u|_{y=0}=x, \quad u_y|_{y=0}=0.$$

Шешуі. Берілген теңдеудің жалпы шешімі (3.1.1 - мысалды қараңыз)

$$u\left(x,y\right)=e^{y-x}g\left(y+x\right)+\psi\left(y-x\right)$$

функциясы болады, мұндағы g және ψ функциялары бір айнымалылы кез келген функциялар. Оларды анықтау үшін есептің шарттарын қолданамыз. y айнымалы бойынша дербес туындысы

$$u_y\left(x,y\right)=e^{y-x}\left(g\left(y+x\right)+g'\left(y+x\right)\right)+\psi'\left(y-x\right).$$

Олай болса,

$$\begin{cases} u\left(x,0\right)=e^{-x}g\left(x\right)+\psi\left(-x\right)=x, \\ u_y\left(x,0\right)=e^{-x}\left(g\left(x\right)+g'\left(x\right)\right)+\psi'\left(-x\right)=0. \end{cases}$$

Бірінші теңдеуден туынды алып, екіншісіне мүшелеп қоссақ:

$$2e^{-x}g'\left(x\right)=1 \quad \Rightarrow \quad g\left(x\right)=\frac{1}{2}e^x+c.$$

Бірінші теңдеуден

$$\psi\left(-x\right)=x-e^{-x}g\left(x\right)=x-\frac{1}{2}+ce^{-x}$$

немесе

$$\psi\left(x\right)=-x-\frac{1}{2}+ce^{x}.$$

Бұларды жалпы шешімге қойып, берілген Коши есебінің шешімін аламыз:

$$u\left(x,y\right)=e^{y-x}\left(\frac{1}{2}e^{y+x}-c\right)-\left(y-x\right)-\frac{1}{2}+ce^{y-x}=x-y+\frac{1}{2}e^{2y}-\frac{1}{2}.$$

Жауабы: $u\left(x,y\right)=x-y-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}e^{2y}.$

3.1.3. Гурса есебі

(3.1.1) теңдеу гиперболалық типті теңдеу болғандықтан, алдыңғы бөлімдерде көрсетілгендей оны

$$Lu\equiv\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+cu(x,y)=f(x,y) \tag{3.1.3}$$

түрге (канондық түрге) келтіруге болады. Бұл (3.1.3) - теңдеудің сипаттауыш теңдеуі

$$dx\cdot dy=0$$

болғандықтан оның сипаттауыштары координат өстеріне параллель болатын $x=const,\ \ y=const$ түзулері болады.

Гурса[2] есебінің қойылымы. Ω облысында (3.1.3) теңдеуді, $x=x_0,\ \ y=y_0$ сипаттауыштарының бойында

$$\begin{aligned} &u(x,y)|_{x=x_0}=\psi(y), \quad y_0\le y\le b,\\ &u(x,y)|_{y=y_0}=\varphi(x), \quad x_0\le x\le a \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

шарттарын қанағаттандыратын $u(x,y)\in C^2\left(\Omega\right)\cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ функциясын анықтау керек. Мұнда $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)\in C(\overline{\Omega})$ және $\overline{\Omega}=[x_0,a]\times[y_0,b]$.

Теорема 3.1.2. *Егер* (3.1.3) *теңдеудің коэффициенттері және* $\varphi(x)$, $\psi(y)$, $f(x,y)$ *функциялары жеткілікті тегіс және* $\varphi(x_0)=\psi(y_0)$ *шарты орындалса,* (3.1.3)-(3.1.4) *Гурса есебінің шешімі бар және жалғыз болады.*

[2]EDOUARD GOURSAT (Эдуар Гурса) (1858-1936) – француз математигі. Оның негізгі жұмыстары дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер (сипаттауыштарына байланысты ДТДТ классификациясы) мен аналитикалық функциялар теориясы саласына қатысты.

Мысал 3.1.3. *Гурса есебін шешіңіз:*

$$2u_{xx} - 2u_{yy} + u_x + u_y = 0, \quad y > |x|\,, \quad u|_{y=x} = 1, \quad u|_{y=-x} = (x+1)e^x.$$

Шешуі. Теңдеуді канондық түрге келтірейік. Сипаттаушы теңдеуі

$$2\,(dy)^2 - 2\,(dx)^2 = 0$$

болғандықтан

$$dy = \pm dx \;\;\Rightarrow\;\; y = x + c_1, \;\; y = x + c_2.$$

Олай болса $\xi = y - x$, $\eta = y + x$ белгілеуін енгізіп, теңдеуді жаңа айнымалылар бойынша жазсақ

$$u_{\xi\eta} - \frac{1}{4}u_\xi = 0$$

теңдеуін аламыз. Бұл теңдеудің жалпы шешімі

$$u\,(\xi, \eta) = e^{\frac{1}{4}\eta}\varphi\,(\xi) + \psi\,(\eta)\,.$$

Демек, берілген теңдеудің жалпы шешімі

$$u\,(x, y) = e^{\frac{1}{4}(y-x)}\varphi\,(y + x) + \psi\,(y - x)\,. \tag{3.1.5}$$

Бұған есептің берілген шарттарын қолданып, φ және ψ функцияларын анықтаймыз

$$\begin{cases} u\,(x, x) = \varphi\,(2x) + \psi\,(0) = 1, \\ u\,(x, -x) = e^{-\frac{1}{2}x}\varphi\,(0) + \psi\,(-2x) = (x+1)\,e^x. \end{cases}$$

Бірінші теңдеуден $\varphi\,(2x) = 1 - \psi\,(0)$ немесе

$$\varphi\,(x) = 1 - \psi\,(0) \tag{3.1.6}$$

және $\varphi\,(0) = 1 - \psi\,(0)\,.$ Екінші теңдеуден

$$\psi\,(-2x) = (x+1)\,e^x - e^{-\frac{1}{2}x}\varphi(0).$$

Бұған $\varphi\,(0) = 1 - \psi\,(0)$ теңдігін қолдансақ

$$\psi\,(-2x) = (x+1)\,e^x - e^{-\frac{1}{2}x}\,(1 - \psi(0))$$

немесе

$$\psi\,(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}} - e^{\frac{1}{4}x}\,(1 - \psi(0)) \tag{3.1.7}$$

теңдігін аламыз. Бұл (3.1.6) және (3.1.7) функцияларды (3.1.5) - ке қойып Гурса есебінің шешімін табамыз:

$$u\,(x, y) = e^{\frac{1}{4}(y-x)}\varphi\,(y + x) + \psi\,(y - x) =$$

$$e^{\frac{y-x}{4}}\,(1 - \psi(0)) + \left(1 - \frac{y - x}{2}\right)e^{-\frac{y-x}{2}} - e^{\frac{y-x}{4}}\,(1 - \psi(0)) = \tfrac{1}{2}\,(2 + x - y)\,e^{\frac{x-y}{2}}.$$

Жауабы: $u\,(x, y) = \dfrac{1}{2}\,(2 + x - y)\,e^{\frac{x-y}{2}}.$

3.1.4. Жаттығулар

Келесі теңдеулердің жалпы шешімін анықтаңыз:

3.1.1. $2u_{xx} - 5u_{xy} + 3u_{yy} = 0.$

3.1.2. $u_{yy} = a^2 u_{xx}.$

3.1.3. $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0.$

3.1.4. $(x-y)u_{xy} - u_x + u_y = 0$ *(нұсқау: $v = (x-y)u$ белгілеуін енгізіңіз).*

3.1.5. $u_{xy} + xu_x - u + \cos y = 0$ *(нұсқау: $v = u_{xx}$ белгілеуін енгізіңіз).*

Коши есебінің шешімін табыңыз:

3.1.6. $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0, \quad -\infty < x, y < \infty,$
$u|_{y=0} = 3x^2, \quad u_y|_{y=0} = 0, \quad |x| < \infty.$

3.1.7. $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} - 2 = 0, \quad -\infty < x, y < \infty,$
$u|_{y=0} = 0, \quad u_y|_{y=0} = x + \cos x, \quad |x| < \infty.$

3.1.8. $e^y u_{xy} - u_{yy} + u_y = 0, \quad -\infty < x, y < \infty,$
$u|_{y=0} = -\frac{1}{2}x^2, \quad u_y|_{y=0} = -\sin x, \quad |x| < \infty.$

3.1.9. $u_{xx} + 2(1+2x)u_{xy} + 4x(1+x)u_{yy} + 2u_y = 0,$
$u|_{x=0} = y, \quad u_x|_{x=0} = 2, \quad |y| < \infty.$

3.1.10. $u_{xy} + u_x = 0, \quad u|_{y=x} = \sin x, \quad u_x|_{y=x} = 1, \quad |x| < \infty.$

3.1.11. *Айталық, $(-1, 1)$ интервалында $\varphi \in C^2$, $\psi \in C^1$ функциялары берілсін. Төмендегі*

$$u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad u|_{y=0} = \varphi(x), \quad u_y|_{y=0} = \psi(x), \quad |x| < 1$$

Коши есебінің $K = \{|x-y| < 1,\ |x+y| < 1\}$ квадратында бір ғана шешімі бар болатындығын және бұл квадрат шешімнің жалғыз болуының ең үлкен облысы болатындығын дәлелдеңіз.

Гурса есебін шешіңіз:

3.1.12. $3x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} - y^2 u_{yy} = 0,\ 1 < y < x,\ x > 1; \quad u|_{y=x} = 0,\ u|_{y=1} = \cos\frac{\pi x}{2},\ x \geq 1.$

3.1.13. $u_{xy} = 0,\ x > 0,\ y > 0,\ u|_{y=0} = f(x),\ x \geq 0,\ u|_{x=0} = g(y),\ y \geq 0$ *мұндағы*
$f,\ g \in C^2(x > 0) \cap C(x \geq 0),\ f(0) = g(0).$

3.1.14. *b параметрінің қандай мәнінде*

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < t < bx,\ x > 0; \quad u|_{t=0} = 0, \quad u|_{t=bx} = 0,\ x \geq 0$$

есебі тек нөлдік шешімге ғана ие болады?

3.1.15. *Егер $f,\ g \in C^2(x > 0) \cap C(x \geq 0)$ берілген функциялар және $f(0) = g(0)$ болса, онда*

$$u_{xy} = 0,\ 0 < y < ax,\ x > 0,\ y > 0; \quad u|_{y=0} = f(x),\ x \geq 0,\ u|_{y=ax} = g(x),\ y \geq 0$$

Гурса есебінің бір ғана шешімі бар екендігін және ол $u = f(x) + g\left(\frac{y}{a}\right) - f\left(\frac{y}{a}\right)$ болатындығын дәлелдеңіз.

3.1.5. Жауаптары

3.1.1. $u = \varphi(x+y) + \psi(3x+2y)$.

3.1.2. $u = \varphi(x+ay) + \psi\left(x-ay\right)$.

3.1.3. $u = \varphi(xy) + \sqrt{xy}\psi\left(\frac{y}{x}\right)$.

3.1.4. $u = \frac{1}{x-y}\left[\varphi(x) + \psi(y)\right]$.

3.1.5. $u = \cos y + x\varphi(y) + \varphi'(y) + \int\limits_0^x (x-s)e^{-ys}\psi(s)ds$.

3.1.6. $u = 3x^2 + y^2$

3.1.7. $u = xy + \frac{3}{2}\sin\frac{2y}{3}\cos\left(x + \frac{y}{3}\right)$.

3.1.8. $u = -\frac{1}{2}x^2 + \cos(x - 1 + e^y) - \cos x$.

3.1.9. $u = 2x + y - x^2$.

3.1.10. $u = \sin y - 1 + e^{x-y}$.

3.1.11. *Тікелей қойып дәлелдеңіз.*

3.1.12. $u = y\cos\frac{\pi x}{2y}$.

3.1.13. $u = f(x) + g(y) - f(0)$.

3.1.14. $b \leq \frac{1}{a}$

3.1.15. *Тікелей қойып дәлелдеңіз.*

3.2 Толқындық теңдеу үшін қойылған Коши есебі. Даламбер формуласы. Дюамель қағидасы

Гиперболалық типті теңдеулерге көбінде толқындық процестерді сипаттайтын теңдеулер жатады. Мәселен, ішектің, мембрананың, газдар мен электрмагниттік толқындардың және т.б. тербеліс есептері келтіріледі. Бұл бөлімшеде осындай есептердің түпкі негізі әрі қарапайымы болатын ішек тербелісінің теңдеуі зерттелетін болады.

3.2.1. Толқындық теңдеу үшін қойылған Коши есебі

Біртекті емес толқындық теңдеуін

$$U_{tt} = a^2 \Delta U + f(x,t), \;\; (x,t) \in Q_t \equiv \{(x,t) : \, x \in R^n, \; t > 0\} \qquad (3.2.8)$$

және

$$U\left(x,0\right) = \varphi\left(x\right), \quad U_t\left(x,0\right) = \psi\left(x\right), \quad x \in R^n \qquad (3.2.9)$$

бастапқы шарттарды қанағаттандыратын $u\left(x,t\right) \in C^{2,2}_{x,t}\left(Q_t\right) \cap C^{0,1}_{x,t}\left(\overline{Q}_t\right)$ шешімін табу есебін қарастырайық. Бұл (3.2.8)-(3.2.9) есебі *толқындық теңдеу үшін қойылған Коши есебі* деп, ал оның

$$u\left(x,t\right) \in C^{2,2}_{x,t}\left(Q_t\right) \cap C^{0,1}_{x,t}\left(\overline{Q}_t\right), \; \overline{Q}_t \equiv Q_t \cup \{t = 0\}$$

шешімі *классикалық шешім* деп аталады. Мұндағы a – жылдамдық, $f(x,t), \; \varphi\left(x\right), \; \psi\left(x\right)$ – берілген тегіс функциялар, ал

$$\Delta U\left(x_1, \, x_2, ... x_n, t\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_k^2}$$

кеңістіктік айнымалылары бойынша анықталған *Лаплас операторы.*

Физикалық мағынасы. (3.2.8)-(3.2.9) есебі $n = 1$ жағдайда шексіз ұзын ішектің тербелісін, $n = 2$ жағдайда жазық мембрананың, $n = 3$ болса, газдың (дыбыстың) таралуын сипаттайды.

(3.2.8)-(3.2.9) есеп сызықтық болғандықтан, оның шешімін төмендегі екі есепке жіктеу арқылы (редукция әдісі деп аталады) іздейміз, яғни шешімді

$$U\left(x,t\right) = u\left(x,t\right) + v\left(x,t\right)$$

түрде іздейміз.

Біріншісі $(u(x,t))$ – *біртекті емес теңдеу үшін біртекті бастапқы шарттармен берілген Коши есебі* :

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \;\; (x,t) \in Q_t, \qquad (3.2.10)$$

$$u\left(x,0\right) = \varphi\left(x\right), \;\; u_t\left(x,0\right) = \psi\left(x\right), \quad x \in R^n. \qquad (3.2.11)$$

Бұл (3.2.10)-(3.2.11) есептің шешімі бір ($n = 2$) өлшемді жағдайда

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\, d\xi \tag{3.2.12}$$

Даламбер[3] формуласымен (қорытып шығаруды келесі пункттен қараңыз), $n = 2$ жағдайда

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\pi}\int\limits_{|\xi-x|<at} \frac{\psi(\xi)\, d\xi}{\sqrt{(at)^2 - |\xi-x|^2}} + \frac{1}{2a\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{|\xi-x|<at} \frac{\varphi(\xi)\, d\xi}{\sqrt{(at)^2 - |\xi-x|^2}} \tag{3.2.13}$$

Пуассон[4] формуласымен,
$n = 3$ өлшемді жағдайда

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2 t}\int\limits_{|\xi-x|=at} \psi(\xi)\, d\xi + \frac{1}{4\pi a^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{t}\int\limits_{|\xi-x|=at} \varphi(\xi)\, d\xi\right] \tag{3.2.14}$$

Кирхгоф[5] формуласымен анықталады.

Бұларға қоса (3.2.10)-(3.2.11) есебінің шешімін көп өлшемді ($n \geq 1$) жағдайда келесі қатар арқылы да анықтауға болады:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(at)^{2k}}{(2k)!}\Delta^k\varphi(x) + \frac{1}{a}\cdot\frac{(at)^{2k+1}}{(2k+1)!}\Delta^k\psi(x)\right]. \tag{3.2.15}$$

Екіншісі ($v(x,t)$) – *біртекті емес теңдеу үшін нөлдік бастапқы шарттарды қанағаттандыратын Коши есебі*:

$$v_{tt} = a^2\Delta v + f(x,t), \ \ (x,t) \in Q_t, \tag{3.2.16}$$

$$v(x,0) = 0, \ \ v_t(x,0) = 0, \ \ \ x \in R^n. \tag{3.2.17}$$

Бұл (3.2.16)-(3.2.17) есепті шешу үшін Дюамель қағидасын қолданамыз, яғни (3.2.16)-(3.2.17) есебіне сәйкес әуелі ***көмекші есеп***[6] құрамыз

$$w_{tt} = a^2\Delta w(x,t,\tau), \ \ x \in R^n, \ \ \ t > \tau, \tag{3.2.18}$$

$$w(x,\tau,\tau) = 0, \ \ w_t(x,\tau,\tau) = f(x,\tau), \ = \tau, \ \ x \in R^n. \tag{3.2.19}$$

---

[3] JEAN LE ROND D'ALEMBERT (Жан Лерон Даламбер) (1717-1783) – француз математигі әрі философы. Оның математикалық зерттеулері жай және дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерде (толқындық теңдеуі), қатарлар теориясында маңызды орын алады.

[4] 2 SIMEON DENIS POISSON (Симон Денис Пуассон) (1781-1840) – француз математигі әрі физигі. Оның негізгі жұмыстары дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер, потенциалдар теориясы және ықтималдықтар теориясын зерттеуге арналған.

[5] GUSTAV ROBERT KIRCHHOFF (Густав Роберт Кирхгоф) (1824-1887) – XIX ғасырдағы неміс физигі. Ол – физикадан өзге математикалық физика саласының да өзекті мәселелерін шешкен ғалым.

[6] Теңдеудің оң жағындағы $f(x,t)$ функциясын (t айнымалысын τ алмастырып) бастапқы шартқа қоямыз.

Бұған $t_1 = t - \tau$ жаңа айнымалысын енгізсек, жоғарыдағы (3.2.10)-(3.2.11) есебіне келеміз және t_1 үшін (3.2.12)-(3.2.15) формулаларының біреуін қолданып $w(x,t,\tau)$ шешімін анықтаймыз.

Егер бұл көмекші есептің шешімі белгілі болса, онда Дюамель[7] қағидасы бойынша (3.2.16)-(3.2.17) есебінің шешімі

$$v(x,t) = \int_0^t w(x,t,\tau)d\tau \tag{3.2.20}$$

интегралы арқылы анықталады.
Бұл (3.2.10)-(3.2.11) және (3.2.16)-(3.2.17) екі есептің шешімінің қосындысы

$$U(x,t) = u(x,t) + v(x,t)$$

жоғарыдағы жалпы түрде қойылған (3.2.8)-(3.2.9) Коши есебінің шешімін береді.

Теорема 3.2.1. *Егер*

$$f(x,t) \in C^1\left(\overline{Q}_t\right),\ \varphi(x) \in C^2(\mathbb{R}),\ \psi(x) \in C^1(\mathbb{R}),\ n = 1;$$
$$f(x,t) \in C^2\left(\overline{Q}_t\right),\ \varphi(x) \in C^3(\mathbb{R}^n),\ \psi(x) \in C^2(\mathbb{R}^n),\ n = 2,3$$

шарттары орындалса, онда (3.2.8)-(3.2.9) *Коши есебінің шешімі бар және жалғыз болады.*

3.2.2. Бір өлшемді біртекті емес толқындық теңдеу үшін қойылған Коши есебі. Даламбер формуласы

Жоғарыдағы (3.2.8)-(3.2.9) толқындық теңдеу үшін қойылған Коши есебі бір өлшемді жағдайда мына түрде жазылады:

$$U_{tt} = a^2U_{xx} + f(x,t),\ \ x \in \mathbb{R} = (-\infty,\infty),\ t > 0, \tag{3.2.21}$$
$$U(x,0) = \varphi(x),\ \ U_t(x,0) = \psi(x),\ \ x \in \mathbb{R}. \tag{3.2.22}$$

Бұл (3.2.21)-(3.2.22) есебі шексіз ұзын (ұштарындағы тербелісті ескермеуге болатындай) ішектің көлденең тербелісін сипаттайды.

Есептің шешімін

$$U(x,t) = u(x,t) + v(x,t)$$

түрде іздейміз. Мұндағы $u(x,t)$ – келесі біртекті теңдеу үшін Коши есебінің шешімі:

$$u_{tt} = a^2u_{xx}(x,t),\ \ x \in \mathbb{R},\ \ t > 0, \tag{3.2.23}$$
$$u(x,0) = \varphi(x),\ \ u_t(x,0) = \psi(x),\ \ x \in \mathbb{R}, \tag{3.2.24}$$

[7]4 JEAN–MARIE CONSTANT DUHAMEL (Жан-Мари Дюамель) (1797–1872) – француз математигі.

ал $v(x,t)$ – біртекті емес теңдеу мен нөлдік бастапқы шарттарды қанағаттандыратын Коши есебінің шешімі:

$$\begin{aligned} &v_{tt} = a^2 v_{xx} + f(x,t), \;\; x \in \mathbb{R}, \;\; t > 0, \\ &v(x,0) = 0, \;\; v_t(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.2.25}$$

Енді жоғарыда айтылғандай, (3.2.23)-(3.2.24) есебінің шешімі (3.2.12) Даламбер формуласымен анықталатынын көрсетейік.

(3.2.23) теңдеудің сипаттауыш теңдеуі (21-беттегі 1.1.3-бөлімді қараңыз)

$$(dx)^2 - (adt)^2 = 0$$

және оның $x - at = C_1$, $x + at = C_2$ екі сипаттауышы болады. Бұл сипаттауыштар арқылы $\xi = x - at$, $\eta = x + at$ жаңа айнымалылар енгізсек, онда (3.2.23) теңдеу

$$u_{\xi\eta} = 0$$

канондық түрге келеді.

Мұны ξ және η бойынша интегралдасақ

$$u_\eta = g_1(\eta), \;\; u = f(\xi) + \int g_1(\eta) d\eta = f(\xi) + g(\eta) \;\; \Rightarrow$$

$$u(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta),$$

мұндағы f, g функциялары – сәйкес ξ, η айнымалыларынан ғана тәуелді екі рет дифференциалданатын кез келген функциялар.

Демек, (3.2.23) теңдеудің жалпы шешімі

$$u(x,t) = f(x - at) + g(x + at). \tag{3.2.26}$$

Әдетте бұл жалпы шешімді Даламбер шешімі деп атайды.

Енді (3.2.24) бастапқы шарттарды қолданып, бұл f, g функцияларын анықтаймыз:

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) + g(x) = \varphi(x), \\ u_t(x,0) = -af'(x) + ag'(x) = \psi(x). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) + g(x) = \varphi(x), \\ -f'(x) + g'(x) = \frac{1}{a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(y)dy + C. \end{cases}$$

Соңғы жүйеден

$$f(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(y)dy - \frac{C}{2}, \qquad g(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(y)dy + \frac{C}{2}.$$

Бұларды (3.2.26) қойсақ, нәтижеде

$$u(x,t) = f(x-at) + g(x+at) =$$

$$\frac{1}{2}\varphi(x-at) - \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x-at}\psi(y)dy - \frac{C}{2} + \frac{1}{2}\varphi(x+at) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x+at}\psi(y)dy + \frac{C}{2} =$$

$$\frac{1}{2}\varphi(x-at) + \frac{1}{2}\varphi(x+at) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(y)dy.$$

(3.2.23)-(3.2.24) есебінің шешімін, яғни (3.2.12) Даламбер формуласын аламыз

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)\right] + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi. \qquad \checkmark$$

Ал (3.2.25) есебінің шешімі Дюамель қағидасы және Даламбер формуласы бойынша

$$v\left(x,t\right) = \frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t}d\tau\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f\left(\xi,\tau\right)d\xi. \tag{3.2.27}$$

Енді бұл екі есептің $u\left(x,t\right)$ және $v\left(x,t\right)$ шешімдерін қосып нәтижеде біртекті емес жалпы түрде қойылған Коши есебінің шешімін аламыз:

$$U\left(x,t\right) = \frac{1}{2}\left[\varphi\left(x+at\right) + \varphi\left(x-at\right)\right] + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi\left(\xi\right)d\xi + \frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t}d\tau\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f\left(\xi,\tau\right)d\xi. \tag{3.2.28}$$

Мысал 3.2.1. *Толқындық теңдеу үшін қойылған Коши есебін шешіңіз:*

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} + xe^{-t}, \;\; x \in \mathbb{R}, \;\; t > 0, \\ u\left(x,0\right) = \sin x, \;\; u_t\left(x,0\right) = x, \;\;\; x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Шешуі. Есептің шешімін жоғарыда көрсетілгендей

$$U\left(x,t\right) = u\left(x,t\right) + v\left(x,t\right)$$

түрде іздейміз, мұндағы $u\left(x,t\right)$:

$$\begin{aligned} &u_{tt} = 4u_{xx}, \;\; x \in \mathbb{R}, \;\; t > 0; \\ &u\left(x,0\right) = \sin x, \;\; u_t\left(x,0\right) = x, \;\;\; x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

біртекті Коши есебінің шешімі. Бұл есеп үшін $a=2,\ \varphi(x)=\sin x,\ \ \psi(x)=x$ екендігін ескеріп, Даламбер формуласын қолданамыз:

$$u\left(x,t\right)=\frac{\sin\left(x+2t\right)+\sin\left(x-2t\right)}{2}+\tfrac{1}{4}\int\limits_{x-2t}^{x+2t}\xi d\xi=\sin x\cos 2t+\left.\frac{\xi^2}{8}\right|_{x+2t}^{x+2t}=$$

$$\sin x\cos 2t+\frac{1}{8}\left((x+2t)^2-(x-2t)^2\right)=\sin x\cos 2t+xt.$$

Демек, $u\left(x,t\right)=\sin x\cos 2t+xt.$

Ал $v\left(x,t\right)$ келесі бертекті емес Коши есебінің шешімі:

$$v_{tt}=4v_{xx}+xe^{-t},\ \ x\in\mathbb{R},\ \ t>0,$$

$$v\left(x,0\right)=0,\ \ v_t\left(x,0\right)=0,\ \ \ x\in\mathbb{R}.$$

Бұған сәйкес көмекші есеп

$$w_{tt}=4w_{xx}(x,t,\tau),\ \ x\in\mathbb{R},\ \ t>\tau,$$

$$w\left(x,t,\tau\right)=0,\ \ w_t\left(x,t,\tau\right)=xe^{-\tau},\ \ \ x\in\mathbb{R}$$

түрде құрылады және оның шешімі (3.2.27) формула бойынша

$$w\left(x,t,\tau\right)=\frac{1}{4}\int\limits_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)}\xi e^{-\tau}d\xi=\left.\frac{1}{8}e^{-\tau}\xi^2\right|_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)}=$$

$$\frac{1}{8}e^{-\tau}\Big((x+2(t-\tau))^2-(x-2(t-\tau))^2\Big)=x(t-\tau)e^{-\tau}.$$

Бұл табылған шешімді (3.2.20) формулаға қойып, $v\left(x,t\right)$ шешімді анықтаймыз:

$$v\left(x,t\right)=\frac{1}{4}\int\limits_0^t x(t-\tau)e^{-\tau}d\tau=\left|\begin{array}{l}u=t-\tau,\ dv=e^{-\tau}\\ du=-d\tau,\ v=-e^{-\tau}\end{array}\right|=$$

$$-\frac{x}{4}(t-\tau)e^{-\tau}\Big|_0^t-\tfrac{x}{4}\int\limits_0^t e^{-\tau}d\tau=\frac{x}{4}t+\frac{x}{4}e^{-\tau}\Big|_0^t=\frac{x}{4}\left(t-1+e^{-t}\right).$$

Демек, берілген есептің шешімі

$$U\left(x,t\right)=u\left(x,t\right)+v\left(x,t\right)=\sin x\cos 2t+\frac{5}{4}xt+\frac{x}{4}\left(e^{-t}-1\right).$$

Жауабы: $\ \ U\left(x,t\right)=\sin x\cos 2t+\dfrac{5}{4}xt+\dfrac{x}{4}\left(e^{-t}-1\right).$

Мысал 3.2.2. *Біртекті емес толқындық теңдеу үшін қойылған Коши есебін шешіңіз:*

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + 2u_t + 4u_x - 3u = e^{2x-t} x \sin t, \;\; x \in \mathbb{R}, \;\; t > 0, \\ \\ u\,(x,0) = e^{2x} \sin x, \;\; u_t\,(x,0) = e^{2x} (\cos x - \sin x), \;\;\; x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Шешуі. Теңдеуді алдымен $u\,(x,t) = e^{\alpha x + \beta t} v(x,t)$ ауыстыруын енгізуі арқылы оны (3.2.8) түрге келтіреміз, яғни α, β белгісіз тұрақтыларын теңдеудің бірінші ретті туындылары болмайтындай таңдап аламыз.
Бұдан u_x, u_t, u_{xx}, u_{tt} туындыларын есептеп теңдеуге қойсақ

$$e^{\alpha x + \beta t} \big(v_{tt} - v_{xx} + (2\beta + 2) v_t + (4 - 2\alpha) v_x + (\beta^2 - \alpha^2 + 2\beta + 4\alpha) v \big) = e^{2x-t} x \sin t$$

теңдігін аламыз. Бірінші ретті туындыларының алдындағы коэффициенттерін нөлге теңестіріп, α, β тұрақтыларын табамыз:

$$\begin{cases} 4 - 2\alpha = 0 \\ 2\beta + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 2, \;\; \beta = -1.$$

Демек, теңдеуге $u\,(x,t) = e^{2x+t} v(x,t)$ ауыстыруын енгіземіз. Мұны берілген есепке қойсақ, нәтижеде $v(x,t)$ функциясына қатысты

$$v_{tt} - v_{xx} = x \sin t, \;\; |x| < \infty, \;\; t > 0,$$

$$v\,(x,0) = \sin x, \;\; v_t\,(x,0) = \cos x, \;\;\; x \in \mathbb{R}$$

Коши есебін аламыз. Бұл есептің шешімі (3.2.28) бойынша

$$v\,(x,t) = \frac{1}{2} \left(\sin\,(x+t) + \sin\,(x-t) \right) + \frac{1}{2} \int\limits_{x-t}^{x+t} \cos \xi d\xi + \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{t} \int\limits_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \xi \sin \tau d\xi d\tau =$$

$$= \sin x \cos t + \sin t \cos x + xt - x \sin t = \sin(x+t) + xt - x \sin t.$$

Жоғарыдағы енгізген ауыстыру бойынша бастапқы есептің шешімі

$$u\,(x,t) = e^{2x+t} \left[\sin(x+t) + xt - x \sin t \right].$$

Мысал 3.2.3. *Толқындық теңдеу үшін қойылған Коши есебін шешіңіз:*

$$u_{tt} - 4\Delta u(x,y,z,t) = 0, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \;\; t > 0,$$

$$u\,(x,y,z,0) = \frac{1}{y}, u_t\,(x,y,z,0) = x^2 + y^2 + z^2 + 2, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Шешуі. Мұнда есеп үш өлшемді болғандықтан (3.2.14) - Кирхгоф формуласын қолдану ондағы интегралдарды есептеуге қатысты қиынға түседі. Сондықтан (3.2.15) формуланы қолдану жеңіл ($a = 2$), яғни:

$$u(x,y,z,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2t)^{2k}}{(2k)!} \Delta^k \left(\frac{1}{y}\right) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2t)^{2k+1}}{(2k+1)!} \Delta^k \left(x^2 + y^2 + z^2 + 2\right).$$

Әуелі Δ^k, $k = 1, 2, ...$ – Лапласиандарды жеке-жеке есептейік:

$$\begin{aligned}
k = 0: \ & \Delta^0 \left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y}, \\
& \Delta^0 \left(x^2 + y^2 + z^2 + 2\right) = x^2 + y^2 + z^2 + 2, \\
k = 1: \ & \Delta^1 \left(\frac{1}{y}\right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{y}\right) = \frac{2!}{y^3}, \\
& \Delta^1 \left(x^2 + y^2 + z^2 + 2\right) = 2 + 2 + 2 = 6, \\
k = 2: \ & \Delta^2 \left(\frac{1}{y}\right) = \Delta \left(\Delta \left(\frac{1}{y}\right)\right) = \frac{4!}{y^5}, \\
& \Delta^2 \left(x^2 + y^2 + z^2 + 2\right) = \Delta(6) = 0, \\
.... \quad & .... \quad ...., \\
k = n: \ & \Delta^n \left(\frac{1}{y}\right) = \Delta \left(\Delta^{n-1} \left(\frac{1}{y}\right)\right) = \frac{(2n)!}{y^{2n+1}}, \\
& \Delta^n \left(x^2 + y^2 + z^2 + 2\right) = 0.
\end{aligned}$$

Бұларды орнына қойсақ:

$$\begin{aligned}
u(x,y,z,t) = \frac{1}{y} + \frac{(2t)^2}{(2)!} \frac{2!}{y^3} + ... + \frac{(2t)^{2n}}{(2n)!} \frac{(2n)!}{y^{2n+1}} + ... + \\
\frac{1}{2} \left[\frac{2t}{1!} \left(x^2 + y^2 + z^2 + 2\right) + \frac{(2t)^3}{3!} \cdot 6\right] = \\
\frac{1}{y} \left[1 + \left(\frac{2t}{y}\right)^2 + \left(\frac{2t}{y}\right)^4 + ... + \left(\frac{2t}{y}\right)^{2n} + ...\right] + t\left(x^2 + y^2 + z^2 + 2\right) + 4t^3 = \\
\frac{1}{y} \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{2t}{y}\right)^2}\right) + t\left(x^2 + y^2 + z^2 + 2\right) + 4t^3 = \frac{y}{y^2 - 4t^2} + t\left(x^2 + y^2 + z^2 + 2\right) + 4t^3.
\end{aligned}$$

Мұндағы шексіз қосындылар $\dfrac{1}{1-x}$ функциясының Маклерон қатарына жіктелуі болғандықтан, ол $2t < y$ болғанда жинақты болады.
Жауабы: $u(x,y,z,t) = \dfrac{y}{y^2 - 4t^2} + t\left(x^2 + y^2 + z^2 + 2\right) + 4t^3.$

Ескерту 3.2.1. *Кейбір біртекті емес есептерді есептің берілгендерінің түріне байланысты кейде айнымалыларға жіктеу әдісінің жетілдіруі болып келетін "дербес шешімдер әдісі" арқылы да шешуге болады.*

Мысал 3.2.4. *Толқындық теңдеу үшін қойылған Коши есебін шешіңіз:*

$$u_{tt} - \Delta u(x,y,z,t) = 6(x^2y - xy^2 + z^2(x-y))t, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ t > 0,$$

$$u\,(x,y,z,0) = 0, u_t\,(x,y,z,0) = \sin x \cos(y+3z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Шешуі. Шешімді $u\,(x,t) = U\,(x,t) + V\,(x,t)$ түрде іздейміз, мұндағы $U\,(x,t)$

$$\begin{aligned} &U_{tt} - \Delta U(x,y,z,t) = 6(x^2y - xy^2 + z^2(x-y))t, \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ t > 0, \\ &U\,(x,y,z,0) = 0, \ U_t\,(x,y,z,0) = 0, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \end{aligned} \tag{3.2.29}$$

есебінің, ал $V\,(x,t)$

$$\begin{aligned} &V_{tt} - \Delta V(x,y,z,t) = 0, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ t > 0, \\ &V\,(x,y,z,0) = 0, \ V_t\,(x,y,z,0) = \sin x \cos(y+3z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \end{aligned} \tag{3.2.30}$$

есебінің шешімі. (3.2.29) есепке Дьюамель қағидасын қолданып, (3.2.15) қатары арқылы шешсек:

$$U\,(x,t) = \int\limits_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-\tau)^{2k+1}}{(2k+1)!} \Delta^k \left[6(x^2y - xy^2 + z^2(x-y))\tau\right] d\tau =$$

$$\int\limits_0^t 6(x^2y - xy^2 + z^2(x-y))(t-\tau)\tau d\tau = (x^2y - xy^2 + z^2(x-y))t^3.$$

(3.2.30) есептің бастапқы берілгендері арнайы түрде болғандықтан, айнымалыларға жіктеп іздеу әдісін қолданамыз, яғни шешімді

$$V\,(x,t) = T(t)X(x)G(y,z) \neq 0$$

түрде іздейік. Мұны екінші бастапқы шартқа қойсақ:

$$V_t\,(x,y,z,0) = T'(0)X(x)G(y,z) = \sin x \cos(y+3z).$$

Бұдан

$$T'(0) = 1, \ \ X(x) = \sin x, \ \ G(y,z) = \cos(y+3z).$$

Сондықтан шешім

$$V\,(x,y,z,t) = T(t) \sin x \cos(y+3z)$$

түрде болады. Мұны (3.2.30) есепке қойып, $T(t)$ функциясы үшін

$$T''(t) - 11T(t) = 0, \ \ T(0) = 0, \ \ T'(0) = 1$$

есебін аламыз және оның шешімі:

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{11}} \sin \sqrt{11}t.$$

Демек,

$$V(x,y,z,t) = \frac{1}{\sqrt{11}} \sin \sqrt{11}t \sin x \cos(y+3z).$$

Бұл (3.2.29) және (3.2.30) есептердің шешімдерін қосып, бастапқы есептің шешімін аламыз

$$u(x,y,z,t) = (x^2y - xy^2 + z^2(x-y))t^3 + \frac{1}{\sqrt{11}} \sin \sqrt{11}t \sin x \cos(y+3z).$$

3.2.3. Шешімнің физикалық интерпретациясы. Шешімнің тәуелділік облысы

1. Шешімнің физикалық интерпретациясы (толқынның таралуы). Толқындық теңдеу үшін қойылған Коши есебі берілсін:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}(x,t), \;\; x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty), \;\; t > 0, \tag{3.2.31}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \;\; u_t(x,0) = \psi(x), \;\; x \in \mathbb{R}. \tag{3.2.32}$$

Жоғарыда айтылғандай, (3.2.31)-(3.2.32) есебінің шешімі (Даламбер шешімі)

$$u(x,t) = f(x-at) + g(x+at) \tag{3.2.33}$$

түрде болады, мұндағы

$$f(x-at) = \frac{1}{2}\varphi(x-at) - \Psi(x-at),$$

$$g(x+at) = \frac{1}{2}\varphi(x+at) + \Psi(x+at) \text{ және } \Psi(x) = \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(y)dy.$$

Енді (3.2.33) шешімге физикалық интерпретация берейік. Ол үшін алдымен

$$u(x,t) = f(x-at)$$

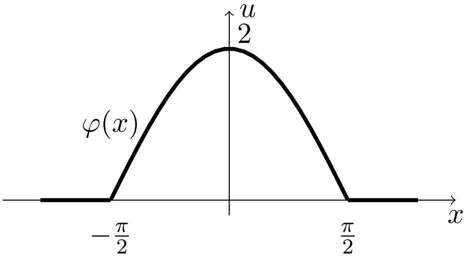
функциясын қарастырайық ($g \equiv 0$). Бұл функцияның графигі $f(x)$ функциясы графигінің бастапқы профилінің өзгеріссіз O_x өсінің бойымен оңға қарай at шамаға жылжуын береді. Бұлар тура толқындар деп аталады. Дәл сол сияқты

$$u(x,t) = g(x+at)$$

функциясы $g(x)$ функциясының профилінің өзгеріссіз солға қарай at шамаға жылжуын береді. Мұндай толқындар кері толқындар деп аталады. Демек, (3.2.33) шешімі a жылдамдықпен солға және оңға қарай таралатын толқындардың суперпозициясы екен.

Мәселен, (3.2.31)-(3.2.32) есебі үшін $\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{\pi}{2}, \\ 2\cos x, & -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x, \end{cases}$

$\psi(x) \equiv 0, \ \ a = 2$ болсын.



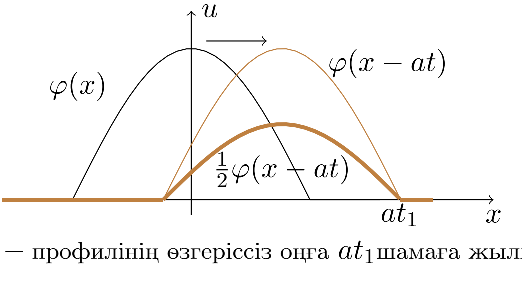
$\psi(x) \equiv 0,$

3.2.3-а сурет. $\varphi -$ Бастапқы профиль

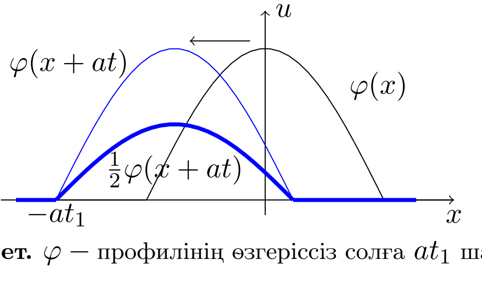
Онда

$$f(x-at) = \frac{1}{2}\varphi(x-at) \text{ және } g(x+at) = \frac{1}{2}\varphi(x+at)$$

функцияларының графиктері сәйкес $\varphi(x)$ функциясының графигін өзгеріссіз солға және оңға қарай at шамаға жылжыту арқылы алынады:

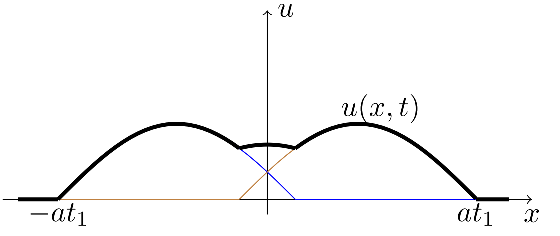


3.2.3-ә сурет. $\varphi -$ профилінің өзгеріссіз оңға at_1шамаға жылжуы



3.2.3-б сурет. $\varphi -$ профилінің өзгеріссіз солға at_1 шамаға жылжуы

Ал $u(x,t) = f(x-at) + g(x+at)$ шешімі бұл функциялардың қосындысы болады.



3.2.3-в сурет. $u(x,t)$ шешімнің t_1 уақыттағы мәні

Бұл мысалдың Maple11 пакетінде жазылған бағдарлама коды:

```
> restart: with(plottools): with(plots):
> u:=(x,t)->(f(x-a*t)+f(x+a*t))/2+int(1/(2*a)*g(v),v=x-a*t..x+a*t);
> a:=2: nch:=3: T:=3: ntsteps:=25:
> shift:=transform((x,y)->[x,y,-0.1]):
> oddext0:=proc(expr,var)
      unapply(signum(var)*unapply(expr,var)(abs(var)),var); end proc:
> evenext0:=proc(expr,var)
      unapply(unapply(expr,var)(abs(var)),var); end proc:
> f:=x->piecewise(x<-0.5*Pi,0, x<0, 2*cos(x), x<0.5*Pi, 2*cos(x),0): g:=x->0:
  plot([f(x),g(x)], x=-3..5,color=[red,green],thickness=2,
  scaling=constrained,title="Бастапқы шарттар",legend=["f(x)","g(x)"]);
```

$u(x,t)$ ***функциясы графигінің уақыт бойынша қозғалуы:***

```
> display([seq(plot(u(x,t/ntsteps),x=-3..5,color=red,thickness=2),
  t=0..T*ntsteps)],scaling=constrained,insequence=true,title="Pick");
```

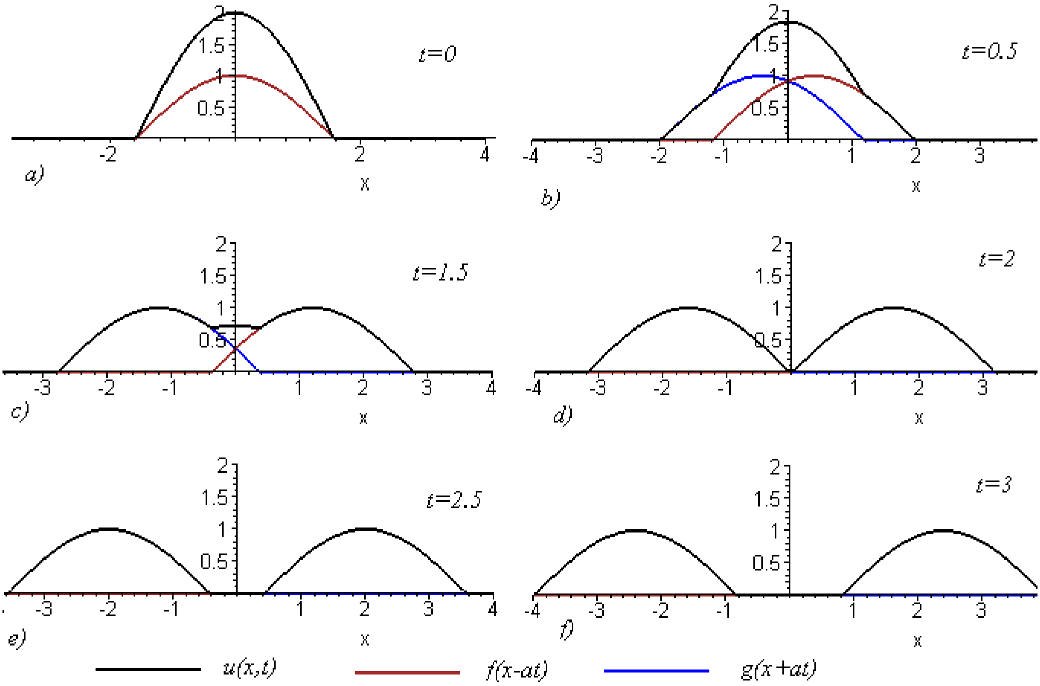
$u, f(x-at), g(x+at)$ ***функция графиктерінің уақыт бойынша қозғалуы:***

```
> display([seq(plot([u(x,t/ntsteps),1/2*f(x-a*t/ntsteps),1/2*f(x+a*t/ntsteps)],
  x=-4..4, color=[black,brown,blue],thickness=2),
  t=0..T*ntsteps)],scaling=constrained,insequence=true);
```

$u(x,t)$ ***функциясының 3D графигін кеңістікте салу:***

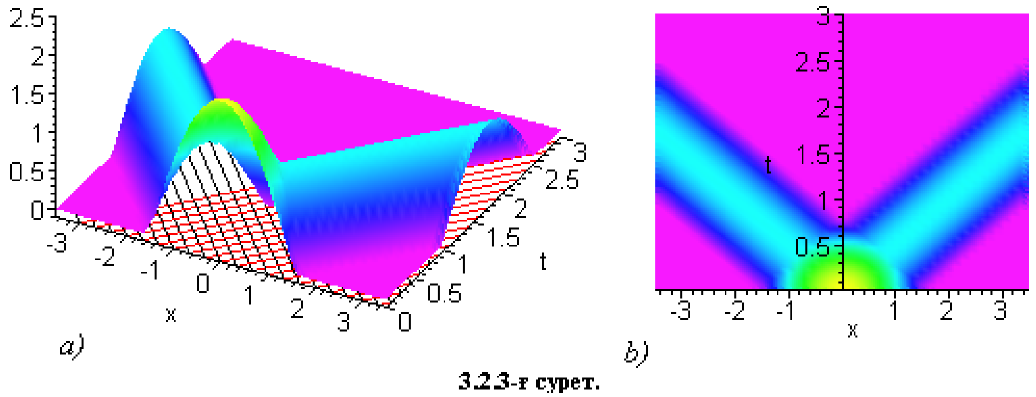
```
> charr:=display([seq(plot([a*t+1/nch*x,t,t=0..T],color=red,thickness=1),
  x=-3.5*nch..3.5*nch)]):
  charl:=display([seq(plot([-a*t+1/nch*x,t,t=0..T],color=black,thickness=1),
  x=-3.5*nch..3.5*nch)]):
> display([plot3d(u(x,t),x=-3.5..3.5,t=0..T,axes=boxed,scaling=constrained,
  numpoints=2000, style=patchnogrid,shading=zhue),
  shift(charr),shift(charl)],orientation=[-90,0],view=[-3.5..3.5,0..T,-0.1..2.5]);
```

$u(x,t)$, $f(x-at)$, $g(x+at)$ функцияларының графигінің уақыт бойынша қозғалуы:



3.2.3-г-сурет.

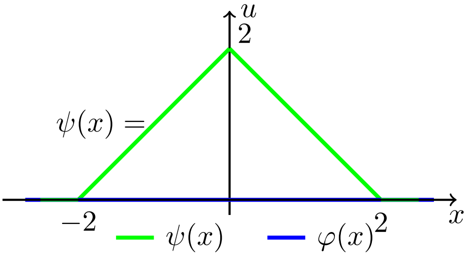
$u(x,t)$ функциясының 3D графигі:



3.2.3-ғ сурет.

Мысал 3.2.5. *Айталық,* (3.2.31)-(3.2.32) *есебі үшін* $a = 2$ $\varphi(x) \equiv 0$ *және* $\psi(x) = \begin{cases} 0, & x < -2, \\ x-2, & -2 \le x \le 0, \\ -x+2, & 0 \le x \le 2, \\ 0, & 2 < x \end{cases}$ *болсын, ягни бастапқы берілгендерінің графигі:*

$\varphi(x) \equiv 0, \qquad \psi(x) =$



3.2.3-д сурет. $\varphi -$ Бастапқы профиль

Бұл жағдайда

$$f(x-at) = -\Psi(x-at) = \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x_0} \psi(y)dy, \;\; g(x+at) = \Psi(x+at) = \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x+at} \psi(y)dy,$$

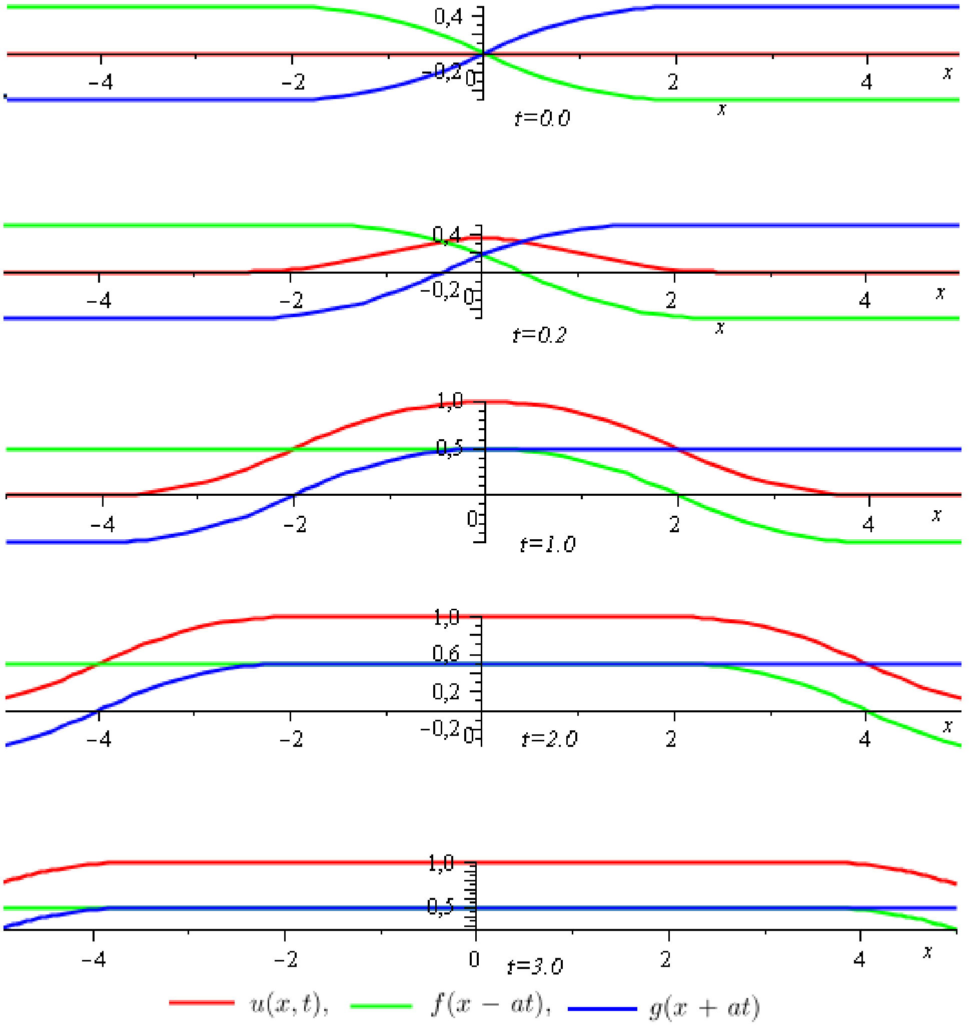
$$u(x,t) = -\Psi(x-at) + \Psi(x+at) = \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(y)dy.$$

Бұл мысалды жоғарыдағыдай Maple11 бағдарламасында орындасақ, төмендегі графиктерді аламыз. Бұл мысалдың Maple11 пакетінде жазылған бағдарлама коды:

```
>  restart: with(plottools): with(plots):
>  f:=x->phi(x-a*t)/2-int(1/(2*a)*psi(v),v=x0..x);
>  g:=x->phi(x+a*t)/2+int(1/(2*a)*psi(v),v=x0..x);
>  u:=(x,t)->f(x-a*t)+g(x+a*t);
>  a:=2: nch:=3: T:=3: ntsteps:=25: x0:=0:
>  shift:=transform((x,y)->[x,y,-0.1]):
>  oddext0:=proc(expr,var)
       unapply(signum(var)*unapply(expr,var)(abs(var)),var); end proc:
>  evenext0:=proc(expr,var)
       unapply(unapply(expr,var)(abs(var)),var); end proc:
>  phi:=x->0: psi:=x->piecewise(x < -2, 0, x < 0, x+2, x < 2, -x+2, 0):
   plot([phi(x),psi(x)], x=-5..5,color=[blue,green],thickness=2,
   scaling=constrained,title="Бастапқы шарттар",legend=["phi(x)","psi(x)"]);
```

$u, f(x-at), g(x+at)$ ***функция графиктерінің уақыт бойынша қозғалуы:***

```
>  display([seq(plot([u(x,t/ntsteps),f(x-a*t/ntsteps),g(x+a*t/ntsteps)],
   x=-5..5, color=[red,green,blue],thickness=2),
   t=0..T*ntsteps)],scaling=constrained,insequence=true);
```



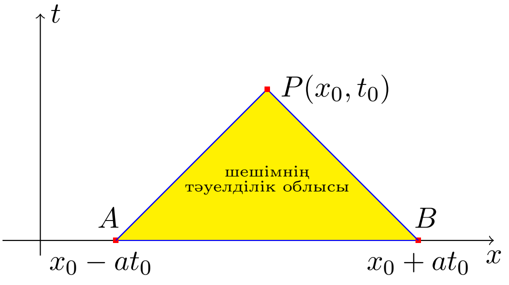
3.2.3-е сурет.

2. Шешімнің тәуелділік облысы. Енді (3.2.31)-(3.2.32) есептің шешімінің $P(x_0, t_0)$ нүктедегі мәнін есептеу үшін нелерді білу жеткілікті? – деген сұраққа жауап іздейік. Ол үшін $P(x_0, t_0)$ нүктесінен (3.2.31) теңдеудің $x - at = x_0 - at_0$ және $x + at = x_0 - at_0$ сипаттауыштарын жүргізейік (3.2.3-д-сурет).

Даламбер формуласы бойынша (x_0, t_0) нүктесіндегі шешімнің мәні:

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x_0 - at_0) + \varphi(x_0 + at_0)\right] + \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0 - at_0}^{x_0 + at_0} \psi(\xi)d\xi.$$

Бұл формуладан $u(x,t)$ шешімнің (x_0, t_0) нүктесіндегі мәнін есептеу үшін φ бастапқы ауытқудың $A = x_0 - at_0$ және $B = x_0 + at_0$ нүктелеріндегі мәндері мен ψ бастапқы жылдамдықтың $(x_0 - at_0, x_0 + at_0)$ аралығындағы мәндерін ғана білу жеткілікті екендігін көреміз. Басқаша айтқанда, $u(x_0, t_0)$ мәні φ, ψ бастапқы берілгендердің $(x_0 - at_0, x_0 + at_0)$ аралығындағы мәндерінен ғана тәуелді болады. φ, ψ функцияларын $(x_0 - at_0, x_0 + at_0)$ аралығының сыртында өзгерткенмен, $u(x_0, t_0)$ мәні өзгермейді. Сондықтан $(x_0 - at_0, x_0 + at_0)$ аралығы ***шешімнің тәуелділік аралығы*** деп, ал сипаттауыштармен шектелген ΔAPB үшбұрышы ***тәуелділік облысы*** кейде сипаттауыштар үшбұрышы деп аталады.



3.2.3-ё сурет. Шешімнің тәуелділік облысы

3.2.4. Жаттығулар

Жоғарыдағы әдістерді қолданып, келесі есептерді шешіңіздер:

3.2.1. $u_{tt} = 25u_{xx} + xt,\ x \in \mathbb{R},\ t \in (0, +\infty)\,,\quad u\,(x, 0) = 0,\ u_t\,(x, 0) = 0,\ x \in \mathbb{R}.$

3.2.2. $u_{tt} = u_{xx} + 6,\ \ x \in \mathbb{R},\ \ t > 0,\qquad u\,(x, 0) = x^2,\ u_t\,(x, 0) = 4x,\ \ x \in \mathbb{R}.$

3.2.3. $u_{tt} = u_{xx} + 2x^2,\ \ x \in \mathbb{R},\ t > 0,\qquad u\,(x, 0) = e^{-x},\ \ u_t\,(x, 0) = 2,\ \ x \in \mathbb{R}.$

3.2.4. $u_{tt} = u_{xx} + g\,(x)\,f\,(t)\,,\ \ x \in \mathbb{R}, t > 0;\quad u\,(x, 0) = 0,\ u_t\,(x, 0) = 0,\ x \in \mathbb{R},$
мұндағы $g(x)$, $f(t)$ *берілген функциялар және* $g^{(2m)}\,(x) \equiv 0.$

3.2.5. $u_{tt} = a^2\Delta u(x, y, t),\ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ t > 0,$
$u\,(x, y, 0) = e^x \cos y,\ \ u_t\,(x, y, 0) = x^2y^2,\ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$

3.2.6. $u_{tt} = \Delta u(x, y, z, t),\ \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ t > 0,$
$u\,(x, y, z, 0) = e^{-x},\ \ u_t\,(x, y, z, 0) = e^{-x},\ \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$

3.2.7. $u_{tt} = \Delta u(x, y, z, t) + ax + bt,\ \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ t > 0,\ a, b = const,$
$u\,(x, y, z, 0) = xyz,\ \ u_t\,(x, y, z, 0) = xy + z,\ \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$

3.2.8. $u_{tt} = 4\Delta u(x, y, t) + (x^2 + y^2)t,\ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ t > 0,$
$u\,(x, y, 0) = e^{-y} \sin x,\ \ u_t\,(x, y, 0) = 0,\ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$

3.2.9. *Төмендегі функциялар толқынның таралуы бола ма? Егер болса, оның жылдамдығын анықтаңыз:*

1. $u(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 + 9t^2.$
2. $u(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 - 4t.$

3.2.10. *Толқынның анықталу облысын анықтаңыз, егер:*

1. ішек теңдеуі үшін Коши есебінің бастапқы шарттары $a \le x \le b$ кесіндіде берілсе және толқынның жылдамдығы $a = 2$ болса;
2. мембрана теңдеуі үшін Коши есебінің бастапқы шарттары $4 \le x^2 + y^2 \le 9$ сақинада берілсе және жылдамдығы $a = 3$ болса.

3.2.11. $k = const$ *тұрақтының қандай мәнінде*

$$u(x_1, x_2, ..., x_n, t) = \frac{1}{(|x|^2 - t^2)^k}, \quad \text{мұнда} \quad |x|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

функциясы $u_{tt} - \triangle u(x_1, x_2, ..., x_n, t) = 0$ *теңдеуінің шешімі болады?*

3.2.12. *Берілген* $m_1, m_2, ...m_{n+1}$ *тұрақтыларының арасында қандай байланыс орындалғанда*

$$u(x_1, x_2, ..., x_n, t) = \Phi\left(m_1 x_1 + m_2 x_2 + ...m_n x_n + m_{n+1} t\right)$$

функциясы $u_{tt} - \triangle u(x_1, x_2, ..., x_n, t) = 0$ *теңдеуінің шешімі болады?*

3.2.13. *Жазық толқын* $u(x_1, x_2, x_3, t) = \Phi\left(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + mt\right)$ *болса, толқынның таралу жылдамдығын анықтаңыз.*

3.2.14. *Коши есебін шешіңіз:*

$$u_{tt} = \Delta u(x, y, z, t), \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ t > 0,$$

$$u\left(x, y, z, 0\right) = \varphi\left(x, y, z\right), \ u_t\left(x, y, z, 0\right) = \psi\left(x, y, z\right), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

мұндағы φ, ψ *кез келген гармоникалық функциялар, яғни* $\Delta\varphi = \Delta\psi = 0$.

3.2.15. *Коши есебін шешіңіз:*

$$u_{tt} = \Delta u(x, y, z, t) + f\left(x, y, z\right), \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ t > 0,$$

$$u\left(x, y, z, 0\right) = \varphi\left(x, y, z\right), \ u_t\left(x, y, z, 0\right) = \psi\left(x, y, z\right), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

мұндағы φ, ψ *кез келген гармоникалық функциялар, яғни* $\Delta\varphi = \Delta\psi = 0$.

3.2.16. *Егер* $u(x, t)$ *функциясы*

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \ x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0, \qquad u(x, 0) = \varphi(x), \ u_t(x, 0) = 0, \ x \in \mathbb{R}^n$$

Коши есебінің шешімі болса, онда $v(x, t) = \int\limits_0^t u(x, \tau) d\tau$ *функциясы*

$$v_{tt} = a^2 \Delta v, \ x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0, \qquad v(x, 0) = 0, \ v_t(x, 0) = \varphi(x)$$

есебінің шешімі болатынын көрсетіңіз.

3.2.17. *Егер* $u(x,t_0,t)$ *функциясы әрбір бекітілген* $t_0 \geq 0$ *үшін*

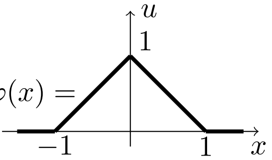
$$u_{tt} = a^2 \Delta u,\ \ x \in \mathbb{R}^n,\ \ t > 0; \qquad u\big|_{t=t_0} = 0,\ \ u_t\big|_{t=t_0} = f(x,t_0),\ \ x \in \mathbb{R}^n$$

Коши есебінің шешімі болса, онда $v(x,t_0,t) = \int\limits_{t_0}^{t} u(x,\tau,t)d\tau$ *функциясы*

$$v_{tt} = a^2 \Delta v + f(x,t),\ \ x \in \mathbb{R}^n,\ \ t > 0; \qquad v\big|_{t=t_0} = 0,\ \ v_t\big|_{t=t_0} = 0,\ \ x \in \mathbb{R}^n$$

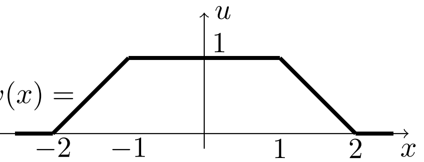
есебінің шешімі болатынын көрсетіңіз.

3.2.18. *Егер* $\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ x+1, & -1 \leq x \leq 0, \\ 1-x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x > 1 \end{cases}$ *және* $\psi(x) = 0$ *болса, шешімнің әртүрлі уақыттағы графигін салыңыз (Maple, Mathcad, т.б. бағдарламалар көмегімен)*

3.2.19. *Егер* $\varphi(x) =$ 

$,\ \psi(x) \equiv 0$ *болса, шешімнің әртүрлі уақыттағы графигін салыңыз (Maple, Mathcad, т.б. бағдарламалар көмегімен).*

3.2.20. *Егер*

$\varphi(x) \equiv 0,\qquad \psi(x) =$ 

болса, шешімнің әртүрлі уақыттағы графигін салыңыз (Maple, Mathcad, т.б. бағдарламалар көмегімен).

3.2.5. Жауаптары

3.2.1. $u\left(x,t\right) = \dfrac{xt^3}{6}.$

3.2.2. $u\left(x,t\right) = \left(x+2t\right)^2.$

3.2.3. $u\left(x,t\right) = 2t + x^2t^2 + \frac{1}{6}t^4 + e^{-x}cht.$

3.2.4. $u\left(x,t\right) = \sum\limits_{k=0}^{m-1} \dfrac{1}{(2k+1)!} g^{(2k)}\left(x\right) \int\limits_0^t \left(t-\tau\right)^{2k+1} f\left(\tau\right) d\tau.$

3.2.5. $u(x,y,t) = e^x \cos y + ax^2y^2t + \frac{(at)^3}{3}(x^2+y^2) + \frac{(at)^5}{15}$.

3.2.6. $u = e^x \cosh t + e^{-x} \sinh t$.

3.2.7. $u = xyz + (xy+z)t + \frac{1}{2}axt^2 + \frac{1}{6}bt^3$.

3.2.8. $u(x,y,t) = e^{-y} \sin x + \frac{t^3}{3}(x^2+y^2) + \frac{4t^5}{15}$.

3.2.9. ***1***. *Толқынның таралуы болады,* $a = \sqrt{3}$; ***2***. *Толқынның таралуы емес.*

3.2.10. ***1***. $\{x-2t=a,\ x+2t=b,\ x+2t=a,\ x-2t=b\}$*-параллелограмы;*
2. $\left\{x-\frac{10}{3}t=2,\ x+\frac{10}{3}t=2,\ x-\frac{10}{3}t=3,\ x+\frac{10}{3}t=3\right\}$*-шаршы* t *өсін айналган дене-тор.*

3.2.11. $k = \frac{n-2}{2}$.

3.2.12. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_k^2 = m_{n+1}^2$.

3.2.13. $\dfrac{|m|}{\sqrt{m_1^2+m_2^2+m_3^2}}$.

3.2.14. $u\left(x,y,z,t\right) = \varphi\left(x,y,z\right) + t\psi\left(x,y,z\right)$.

3.2.15. $u\left(x,y,z,t\right) = \varphi\left(x,y,z\right) + t\psi\left(x,y,z\right) + \dfrac{t^2}{2}f\left(x,y,z\right)$.

3.3 Параболалық теңдеулерге қойылған Коши есебі

Параболалық типті теңдеулердің ең қарапайымы – жылуөткізгіштік теңдеуі. Жылуөткізгіштік теңдеуі жылудың және диффузияның таралу процесстерін зерттеуде туындайды. Бұл бөлімде осы жылуөткізгіштік теңдеуі үшін әр түрлі қойылымдағы Коши есебінің шешілу мәселелері қарастырылады.

3.3.1. Жылуөткізгіштік теңдеуіне қойылған Коши есебі

1. Біртекті теңдеу үшін Коши есебі.

Есептің қойылымы. $Q = \{(x,t):\ x=(x_1,x_2,...x_n)\in\mathbb{R}^n,\ t>0\}$ облысында

$$u_t\left(x,t\right)=a^2\Delta u\left(x,t\right),\ (x,t)\in Q \tag{3.3.34}$$

жылуөткізгіштік теңдеуін және

$$u\left(x,0\right)=\varphi\left(x\right),\ \ x\in\mathbb{R}^n \tag{3.3.35}$$

бастапқы шартын қанағаттандыратын $u\left(x,t\right) \in C^{2,1}_{x,t}\left(Q\right)\bigcap C\left(\bar{Q}\right)$ функциясын анықтау есебі *жылуөткізгіштік теңдеуі үшін Коши есебі* деп аталады. Мұндағы $\varphi\left(x\right)$ – белгілі берілген функция, Δ – Лаплас операторы.

Бұл есептің шешімі *Пуассон формуласы* деп аталатын

$$u\left(x,t\right)=\frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi\left(\xi\right)e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2t}}d\xi \tag{3.3.36}$$

формуламен анықталады, мұндағы $|x-\xi|^2=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(x_k-\xi_k\right)^2$ және

$$G\left(x,\xi,t\right)=\frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2t}}.$$

$G\left(x,\xi,t\right)$ функциясы әдетте жылуөткізгіштік теңдеудің іргелі шешімі деп аталады.

2. Біртекті емес теңдеу үшін Коши есебі. Айталық, жылу сыртқы белгілі бір $f\left(x,t\right)$ күштің әсерінен таралсын, яғни келесі біртекті емес жылуөткізгіштік теңдеуіне қойылған Коши есебін қарастырайық:

$$u_t\left(x,t\right)=a^2\Delta u\left(x,t\right)+f(x,t),\ \ (x,t)\in Q, \tag{3.3.37}$$

$$u\left(x,0\right)=\varphi\left(x\right),\ \ \ x\in\mathbb{R}^n. \tag{3.3.38}$$

Біртекті емес жылуөткізгіштік теңдеуіне қойылған Коши есебін шешу алдыңғы бөлімдегі қарастырылған біртекті емес толқындық теңдеулерге қойылған Коши есебін шешу жолымен бірдей (3.2.1. - бөлімді қараңыз). Сондықтан ондағы айтылғандарды қайталамауды жөн көрдік.

Сонымен, (3.3.37)-(3.3.38) есебіне Дюамель қағидасын қолдансақ, нәтижеде

$$u\left(x,t\right)=\frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^{n}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n}}\varphi\left(\xi\right)e^{-\frac{|x-\xi|^{2}}{4a^{2}t}}d\xi+\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^{n}}\frac{f\left(\xi,\tau\right)}{\left(2a\sqrt{\pi\left(t-\tau\right)}\right)^{n}}e^{-\frac{|x-\xi|^{2}}{4a^{2}(t-\tau)}}d\xi d\tau \tag{3.3.39}$$

шешімін анықтаймыз.

Бір өлшемді ($n=1$) жағдайда (3.3.36) және (3.3.39) формулалары сәйкес

$$u\left(x,t\right)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(\xi\right)e^{-\frac{(x-\xi)^{2}}{4a^{2}t}}d\xi, \tag{3.3.40}$$

$$u\left(x,t\right)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(\xi\right)e^{-\frac{(x-\xi)^{2}}{4a^{2}t}}d\xi+\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f\left(\xi,\tau\right)}{2a\sqrt{\pi\left(t-\tau\right)}}e^{-\frac{(x-\xi)^{2}}{4a^{2}(t-\tau)}}d\xi d\tau \tag{3.3.41}$$

түрде өрнектеледі.

Мысал 3.3.1. *Коши есебін шешіңіз:*

$$\begin{cases} u_t=4u_{xx}, & -\infty<x<\infty, \quad 0<t<\infty, \\ u(0,x)=e^{-4x^2-3x}, & -\infty<x<\infty. \end{cases}$$

Шешуі. Мұнда $n=1$, $a=2$ және $\varphi(x)=e^{-4x^2-3x}$ болғандықтан, (3.3.40) Пуассон формуласы бойынша

$$u\left(x,t\right)=\frac{1}{4\sqrt{\pi\, t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-4\xi^2-3\xi}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{16t}}d\xi.$$

Бұған

$$\frac{\xi-x}{4\sqrt{t}}=y, \quad \frac{d\xi}{4\sqrt{t}}=dy, \quad \xi=4\sqrt{t}y+x$$

ауыстыруын енгізсек,

$$u\left(t,x\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-4(4\sqrt{t}y+x)^2-3(4\sqrt{t}y+x)}e^{-y^2}dy=$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-4(16ty^2+8\sqrt{t}yx+x^2)-12\sqrt{t}y-3x}e^{-y^2}dy=$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-4x^2-3x}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-64ty^2-32\sqrt{t}yx-12\sqrt{t}y-y^2}dy=$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-4x^2-3x}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2(64t+1)-y(32\sqrt{t}x+12\sqrt{t})}dy.$$

Мұнда дәрежесін төмендегіше түрлендіріп

$$-y^2(64t+1)-y(32\sqrt{t}x+12\sqrt{t})=-(64t+1)\left(y^2+2y\frac{16\sqrt{t}x+6\sqrt{t}}{64t+1}\right)=$$

$$-(64t+1)\left(y+\frac{16\sqrt{t}x+6\sqrt{t}}{64t+1}\right)^2+\frac{\left(16\sqrt{t}x+6\sqrt{t}\right)^2}{64t+1}$$

және Эйлер - Пуассон интегралын[8] қолдансақ, нәтижеде

$$u(t,x)=\frac{e^{-4x^2-3x+\frac{(16x+6)^2t}{64t+1}}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-(64t+1)\left(y+\frac{16\sqrt{t}x+6\sqrt{t}}{64t+1}\right)^2}dy=$$

$$\frac{1}{\sqrt{64t+1}}e^{-4x^2-3x+\frac{4t(8x+3)^2t}{64t+1}}$$

шешімді аламыз.

3. Қатар арқылы шешу. Көп жағдайларда (3.3.34)-(3.3.35) есебінің шешімін (3.3.36) немесе (3.3.40) формулалары бойынша интегралды есептеу арқылы анықтау қиындық тудырады. Мұндай кездерде (3.3.34)-(3.3.35) есебінің шешімін келесі қатар арқылы анықтау ыңғайлы болады:

$$u\left(x,t\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{2k}t^k}{k!}\Delta^k\varphi\left(x\right). \tag{3.3.42}$$

Мысал 3.3.2. *Коши есебін шешіңіз:*

$$\begin{aligned}&u_t=u_{xx}+u_{yy},\ \ (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \ t>0,\\&u\left(x,y,0\right)=1-x^2-y^2,\ \ (x,y)\in\mathbb{R}^2.\end{aligned}$$

[8] Эйлер - Пуассон интегралы $\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ ($a>0$).

Шешуі. (3.3.42) формула бойынша:

$$
\begin{aligned}
&u\left(x,y,t\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k t^k}{k!}\Delta^k\left(1-x^2-y^2\right)=\\
&\left|\Delta\left(1-x^2-y^2\right)=-4,\ \Delta^2\left(1-x^2-y^2\right)=0,\ldots\right|=\\
&1-x^2-y^2+\frac{t}{1!}\left(-4\right)=1-x^2-y^2-4t.
\end{aligned}
$$

Мысал 3.3.3. *Біртекті емес теңдеу үшін Коши есебін шешіңіз:*

$$
\begin{aligned}
&u_t=2u_{xx}+xt,\ x\in\mathbb{R},\ t>0,\\
&u(x,0)=x^2+\cos 2x,\ x\in\mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Шешуі. Шешімді $u=v+\vartheta$ түрінде іздейміз, мұндағы $v\left(x,t\right)$ функциясы

$$
\begin{aligned}
&v_t=2v_{xx}\quad x\in\mathbb{R},\ t>0,\\
&v(x,0)=x^2+\cos 2x,\ x\in\mathbb{R}
\end{aligned}
\tag{3.3.43}
$$

есептің шешімі, ал $\vartheta\left(x,t\right)$ функциясы

$$
\begin{aligned}
&\vartheta_t=2\vartheta_{xx}+xt,\ x\in\mathbb{R},\ t>0,\\
&\vartheta(x,0)=0,\ x\in\mathbb{R}
\end{aligned}
\tag{3.3.44}
$$

есептің шешімі.
(3.3.43) есептің шешімі (3.3.42) бойынша:

$$
u\left(x,t\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k t^k}{k!}\Delta^k\left(x^2+\cos 2x\right)=
$$

$$
\left|\begin{array}{l}
\Delta\left(x^2+\cos 2x\right)=2-2^2\cos 2x,\\
\Delta^2\left(x^2+\cos 2x\right)=\Delta\left(2-2^2\cos 2x\right)=-2^4\cos 2x,\\
\ldots\quad\ldots\quad\ldots\\
\Delta^k\left(x^2+\cos 2x\right)=(-1)^k 2^{2k}\cos 2x,\ldots
\end{array}\right|=
$$

$$
x^2+\cos 2x+\frac{2t}{1!}\left(2-2^2\cos 2x\right)+...+\frac{2^k t^k}{k!}\left(-1\right)^k\left(2^{2k}\cos 2x\right)+\ldots=
$$

$$
x^2+4t+\left[1-\frac{2^3 t}{1!}+\frac{\left(2\cdot 2^2 t\right)^2}{2!}+\frac{\left(2\cdot 2^2 t\right)^3}{3!}+...+\frac{\left(-2\cdot 2^2 t\right)^k}{k!}+...\right]\cos 2x=
$$

$$
x^2+4t+e^{-8t}\cos 2x.
$$

Ал (3.3.44) есепті Дюамель қағидасын пайдаланып шешеміз, яғни алдымен

$$
\begin{aligned}
&\omega_t=2\omega_{xx}(x,t,\tau),\ x\in R,\ t\geq\tau,\\
&\omega(x,\tau,\tau)=x\tau,\ t=\tau,\quad x\in R
\end{aligned}
$$

түрдегі көмекші есеп құрамыз. Бұл есептің шешімі $t > \tau$ үшін (3.3.42) бойынша

$$\omega\left(x,t,\tau\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k\left(t-\tau\right)^k}{k!}\Delta^k\left(x\tau\right)=x\tau.$$

Ал, $\vartheta(x,t)=\int\limits_0^t x\tau d\tau=\dfrac{xt^2}{2}$. Демек, берілген есептің шешімі

$$u=v+w=x^2+4t+e^{-8t}\cos 2x+\frac{1}{2}xt^2.$$

4. Дербес шешімдер әдісі арқылы шешу. Кейбір біртекті емес теңдеулерді $f\left(x,t\right),\varphi(x)$ функцияларының берілу түріне байланысты кейде айнымалаларға жіктеу әдісінің жетілдіруі болып келетін *дербес шешімдер әдісі* арқылы да шешуге болады.

Мысал 3.3.4. *Коши есебінің шешімін табыңыз:*

$$\begin{array}{l} u_t-a^2u_{xx}=e^t chx,\quad x\in\left(-\infty,\infty\right),\ \ t>0,\\ u\left(x,0\right)=chx,\quad x\in\left(-\infty,\infty\right). \end{array}$$

Шешуі. Шешімді $u\left(x,t\right)=T\left(t\right)\cdot X\left(x\right)\neq 0$ түрде іздейік. Онда бастапқы шарт бойынша $u\left(x,0\right)=T\left(0\right)\cdot X\left(x\right)=chx$. Бұдан $X\left(x\right)=chx,\ \ T\left(0\right)=1$ деп алуға болады.

Екінші жағынан теңдеуге қойсақ,

$$T'\left(t\right)\cdot chx-a^2T\left(t\right)\cdot chx=e^t chx\ \ \Rightarrow$$

нәтижеде

$$T'\left(t\right)-a^2T\left(t\right)=e^t,\ \ T\left(0\right)=1$$

жай дифференциалдық теңдеу үшін Коши есебіне келеміз. Бұл есептің шешімі:

$$T\left(t\right)=e^{a^2t}\left[1+\int\limits_0^t e^{\tau}e^{-a^2\tau}d\tau\right]=e^{a^2t}\left[1+\frac{e^{\left(1-a^2\right)t}-1}{1-a^2}\right]=\frac{e^t-a^2e^{a^2t}}{1-a^2},\ a^2\neq 1,$$

$$T\left(t\right)=e^t\left[1+t\right],\ \ a^2=1.$$

Демек, ізделінді шешім

$$u\left(x,t\right)=\begin{cases}\dfrac{chx}{1-a^2}\left[e^t-a^2e^{a^2t}\right],\quad a^2\neq 1,\\[2ex] e^t\left[1+t\right]chx,\ \ a^2=1.\end{cases}$$

3.3.2. Жаттығулар

Жоғарыдағы әдістерді қолданып, келесі есептерді шешіңіздер:

3.3.1. $u_t = u_{xx},\ \ x \in \mathbb{R},\ \ t >, \qquad u\,(x, 0) = e^x,\ \ x \in \mathbb{R}.$

3.3.2. $u_t = u_{xx} + x^2 + 2xt - 2t,\ \ x \in \mathbb{R},\ \ t > 0, \qquad u\,(x, 0) = x + 2,\ \ x \in \mathbb{R}.$

3.3.3. $u_t = u_{xx} + 3t^2,\ \ x \in \mathbb{R},\ \ t > 0, \qquad u\,(x, 0) = \sin x,\ \ x \in \mathbb{R}.$

3.3.4. $u_t = u_{xx} + x\cos t - e^x,\ \ x \in \mathbb{R},\ \ t > 0, \qquad u\,(x, 0) = e^x - 1,\ \ x \in \mathbb{R}.$

3.3.5. $u_t = \Delta u + e^t,\ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ t > 0, \quad u\,(x, y, 0) = \cos x \sin y,\ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$

3.3.6. $u_t = 4\Delta u + 1 + (8t + 1)\sin x \cos y,\ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ t > 0,$
$u\,(x, y, 0) = x + y,\ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$

3.3.7. $u_t - \dfrac{1}{3}\Delta u + xyz,\ \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \ t > 0,$
$u\,(x, y, z, 0) = e^{x+y+z},\ \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$

3.3.8. $u_t = \triangle u(x,t),\ \ x \in \mathbb{R}^n,\ \ t > 0,\ \ \ u|_{t=0} = u_0(x),\ \ x \in \mathbb{R}^n$
жылуөткізгіштік теңдеуі үшін Коши есебін шешіңіз, мұндағы:
а) $u_0 = \cos\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)$; *ә)* $u_0 = e^{-|x|^2}$; *б)* $u_0 = \exp\left[-\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^2\right]$.

3.3.9. $u(x,t) = e^{\alpha x}\cos(\beta x + \gamma t)$ *функциясы* $u_t = u_{xx}$ *жылуөткізгіштік теңдеуінің шешімі болатындай* $\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \gamma > 0$ *параметрлерінің арасындағы қатынасты анықтаңыз және сол шешімді жазыңыз.*

3.3.10. $u_t - a^2 u_{xx} - b u_x - cu = f(x,t)$, *теңдеуі* $v(y,t) = e^{-ct}u(y - bt, t)$ *алмастыруы арқылы жылуөткізгіштік теңдеуіне келетіндігін көрсетіңіз, мұндағы* $a,\ b,\ c$ *– тұрақты сандар.*

3.3.11. *Егер:*
а) $f = 1,\ u_0 = 1,\ \ c = 1;$
ә) $f = e^t,\ u_0 = \cos x,\ \ a = c = 1,\ \ b = 0;$
б) $f = t\sin x,\ u_0 = 1,\ \ a = c = 1,\ \ b = 0;$
в) $f = 0,\ u_0 = e^{-x^2};$
г) $f = \omega(t) \in C^1(t \geq 0),\ u_0 \in C$ *шенелген функциялар болса, жылуөткізгіштік теңдеуі үшін* $u_t - a^2 u_{xx} - b u_x - cu = f(x,t),\ u|_{t=0} = u_0(x)$ *Коши есебін шешіңіз.*

3.3.12. *Коши есебін шешіңіз және шешімді қателік интегралы арқылы өрнектеңіз:*

$$u_t = a^2 u_{xx},\ \ x \in \mathbb{R},\ \ t > 0, \qquad u\,(x, 0) = \begin{cases} u_0, & x < 0, \\ u_1, & x \geq 0,\ \ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

мұндағы $u_0,\ \ u_1$ *– тұрақты сандар.*

3.3.13.

$$u_t = a^2 u_{xx},\ \ x \in \mathbb{R},\ \ t > 0, \qquad u(x,0) = \begin{cases} u_0, & \alpha < x < \beta, \\ 0, & x \overline{\in} (\alpha,\beta),\ \ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Коши есебін шешіңіз және шешімді қателік интегралы арқылы өрнектеңіз. Кез келген компьютерлік математикалық пакеттердің бірін (Maple, т.б.) қолданып, $t_0 = 0$, $t_1 = 0.004$, $t_2 = 4$ *уақыттардағы* ($a = 1$) *графигін көрсетіңіз.*

3.3.14. *Егер* $u(x,\tau,t)$ *функциясы*

$$u_t = a^2 \Delta u,\ \ x \in \mathbb{R}^n,\ \ t > \tau; \qquad u\big|_{t=\tau} = f(x,\tau),\ \ x \in \mathbb{R}^n,\ \ \tau > 0$$

Коши есебінің шешімі болса, онда $v(x,t) = \int\limits_0^t u(x,\tau,t)d\tau$ *функциясы*

$$v_t = a^2 \Delta v + f(x,t),\ \ x \in \mathbb{R}^n,\ \ t > 0; \qquad v\big|_{t=0} = 0,\ \ x \in \mathbb{R}^n$$

есебінің шешімі болатынын көрсетіңіз.

3.3.15. *Егер* $u(x,t)$ *функциясы*

$$u_t = u_{xx},\ \ x \in \mathbb{R},\ \ t > 0$$

теңдеудің шешімі болса, онда кез келген $\lambda \in \mathbb{R}$ *саны үшін* $u(\lambda x, \lambda^2 t)$ *функциясы да сол теңдеудің шешімі болатынын көрсетіңіз.*

3.3.3. Жауаптары

3.3.1. $u(x,t) = e^{x+t}$.

3.3.2. $u(x,t) = 2 + x + x^2 t + x t^2$.

3.3.3. $u(x,t) = t^3 + \sin x e^{-t}$.

3.3.4. $u(x,t) = e^x + x \sin t - 1$.

3.3.5. $u(x,y,t) = e^t - 1 + e^{-2t} \sin y \cos x$.

3.3.6. $u(x,y,t) = x + y + t + t \sin x \cos y$.

3.3.7. $u(x,y,z,t) = e^{x+y+z+t} + xyzt$.

3.3.8. *а)* $u = e^{-nt} \cos\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)$;

ә) $u = \dfrac{1}{\sqrt{(1+4t)^n}} \exp\left[-\dfrac{|x|^2}{1+4t}\right]$;

б) $u = \dfrac{1}{\sqrt{1+4nt}} \exp\left[-\dfrac{1}{1+4nt}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^2\right]$.

3.3.9. $\beta = \alpha,\ \ \gamma = 2\alpha^2,\ \ u(x,t) = e^{\alpha x}\cos(\alpha x + 2\alpha^2 t),\ \ \alpha > 0.$

3.3.10. *Нұсқау: теңдеуге тікелей қойыңыз.*

3.3.11. *а)* $u = 2e^t - 1$; *ә)* $u = te^t + \cos x$; *б)* $u = e^t + \frac{1}{2}t^2 \sin x$;

в) $u = \dfrac{1}{\sqrt{1+4a^2 t}} \exp\left[ct - \frac{(x+bt)^2}{1+4a^2t}\right]$;

г) $u = \displaystyle\int\limits_0^t \omega(t-\tau)e^{c\tau}d\tau + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi)\exp\left[ct - \frac{(x-\xi+bt)^2}{4a^2t}\right]d\xi.$

3.3.12. $u(x,t) = \dfrac{u_0+u_1}{2} + \dfrac{u_1-u_0}{2}\Phi\left(\dfrac{x}{2a\sqrt{t}}\right).$

3.3.13. $u(x,t) = \dfrac{u_0}{2}\left(\Phi\left(\dfrac{x-\alpha}{2a\sqrt{t}}\right) + \Phi\left(\dfrac{\beta-x}{2a\sqrt{t}}\right)\right),$

мұндағы $\Phi(z) = erf z = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int\limits_0^z e^{-\xi^2}d\xi.$

3.3.14. *Нұсқау:* $t - \tau = t_1$ *белгілеуін енгізіңіз.*

3.3.15. *Нұсқау: Тікелей теңдеуге қойыңыз.*

3.4 Жарты өстегі Коши есебі. Жалғастыру әдісі

Егер жылуөткізгіштік немесе толқындық теңдеулер үшін Коши есебі жарты өсте қойылса, онда Пуассон немесе Даламбер формулаларын қолдана алмаймыз. Мұндай жағдайда есептің берілгендерін жарты өстен толық өске тақ және жұп жалғастыру арқылы Пуассон немесе Даламбер формулаларын қолданып, шешімді анықтаймыз. Мұндай әдіс жалғастыру әдісі деп аталады. Мұнда, әрине, тақ, жұп жалғастырулары орынды болатын қосымша шарттары беріледі.

3.4.1. Толқындық теңдеуі үшін жарты өсте қойылған Коши есебі

1. Біртекті толқындық теңдеуі үшін қойылған Коши есебі. Бір ұшы бекітілген шексіз ұзын ішектің тербелісі үшін қойылған Коши есебін, яғни $Q^+ = \{(x,t)\,|,\ x \in (0,\infty)\,,\ t>0\}$ облысында

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \tag{3.4.45}$$

теңдеуін,

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t\,(x,0) = \psi(x),\, x \in [0,\infty) \tag{3.4.46}$$

бастапқы шарттарын және

$$u(0,t) = 0\ (\text{немесе}\, u_x(0,t) = 0) \tag{3.4.47}$$

шекаралық шартын[9] қанағаттандыратын $u\,(x,t) \in C^{2,2}_{x,t}\,(Q^+)$ классикалық шешімді табу есебін қарастырайық.

Бұл есепті шешуде келесі лемманы қолданамыз[10].

Лемма 3.4.1. *Айталық,*

$$\begin{array}{l} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t),\ x \in (-\infty,+\infty),\, t>0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ \ u_t|_{t=0} = \psi(x),\ x \in (-\infty,+\infty) \end{array} \tag{3.4.48}$$

Коши есебі берілсін.

- *Егер* $f\,(x,t) \equiv 0$ *және* φ, ψ *функциялары қандай да бір* x_0 *нүктеге қатысты тақ функциялар болса, онда* (3.4.48) *есептің шешімі осы* x_0 *нүктеде нөлге тең, яғни*

$$u(x_0,t) = 0. \tag{3.4.49}$$

- *Егер* $f\,(x,t) \equiv 0$ *және* φ, ψ *функциялары қандай да бір* x_0 *нүктеге қатысты жұп функциялар болса, шешімнің x бойынша дербес туындысы осы* x_0 *нүктеде нөлге тең:*

$$u_x(x_0,t) = 0. \tag{3.4.50}$$

[9] Бұл шарт есептің шешімі бірмәнді болу үшін қажет
[10] Дәлелдеуі Даламбер формуласынан тікелей шығады

- *Егер $\varphi \equiv 0, \quad \psi \equiv 0$ және $f\left(x, t\right)$ функциясы қандай да бір x_0 нүктеге қатысты тақ функция болса, онда есептің шешімі осы x_0 нүктеде нөлге тең:*

$$u(x_0, t) = 0. \tag{3.4.51}$$

- *Егер $\varphi \equiv 0, \quad \psi \equiv 0$ және $f\left(x, t\right)$ функциясы қандай да бір x_0 нүктеге қатысты жұп функция болса, онда шешімнің x бойынша дербес туындысы осы x_0 нүктеде нөлге тең, яғни*

$$u_x(x_0, t) = 0. \tag{3.4.52}$$

Бұл лемманы пайдаланып, (3.4.45)-(3.4.47) есебін шешейік. $(0, \infty)$ жарты өсте анықталған $\varphi(x)$ және $\psi(x)$ функцияларын төмендегідей барлық $(-\infty, +\infty)$ өске тақ жалғастыра отырып,

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi\left(x\right), \ x \geq 0, \\ -\varphi\left(-x\right), \ x < 0, \end{cases} \quad \Psi(x) = \begin{cases} \psi\left(x\right), \ x \geq 0, \\ -\psi\left(-x\right), \ x < 0 \end{cases} \tag{3.4.53}$$

$\Phi(x), \Psi(x)$ функцияларын анықтайық. Бұл анықталған $\Phi(x), \Psi(x)$ функциялары $(-\infty, +\infty)$ аралығында тақ функциялар болатындығы анық.

Енді осы $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ функциялары бастапқы берілгендері болып келетін Коши есебін құрайық:

$$U_{tt} - a^2 U_{xx} = 0, \ x \in (-\infty, +\infty), \ t > 0, \tag{3.4.54}$$

$$U(x, 0) = \Phi(x), \ U_t(x, 0) = \Psi(x), \ x \in (-\infty, +\infty). \tag{3.4.55}$$

Бұл есепке Даламбер формуласын қолдана аламыз және оның шешімі:

$$U(x, t) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(+ at\right) + \Phi(x - at)\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-at}^{x+at} \Psi\left(\xi\right) d\xi. \tag{3.4.56}$$

Екінші жағынан $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ тақ функциялар болғандықтан, 3.4.1 - лемманың бірінші тұжырымы ((3.4.49)) бойынша

$$U(0, t) = 0 \tag{3.4.57}$$

шарты орындалады.

Сонымен, $U(x, t)$ функциясы $t > 0$ және $x > 0$ үшін (3.4.45) теңдеуді ((3.4.45) мен (3.4.54) бір теңдеу) және (3.4.47) ((3.4.47) мен (3.4.57) бір шарт) шекаралық шартты және де

$$U(x, 0) = \Phi(x) = \varphi(x), \ x \geq 0,$$

$$U_t(x,0) = \Psi(x) = \psi(x),\ x \geq 0$$

(3.4.46) бастапқы шарттарды қанағаттандырады. Демек, $U(x,t)$ функциясы $(0,\infty)$ жарты өсте (3.4.45)-(3.4.47) есебінің де шешімі[11] болады. Олай болса, (3.4.53) ескеріп, шешімді есептің берілгендері арқылы жазамыз:

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\varphi\left(x+at\right)+\varphi(x-at)\right)+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi\left(\xi\right)d\xi,\ x \geq at,\ t>0, \\ \dfrac{1}{2}\left(\varphi\left(x+at\right)-\varphi(at-x)\right)+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{at-x}^{x+at}\psi\left(\xi\right)d\xi,\ 0<x<at,\ t>0. \end{cases} \tag{3.4.58}$$

Егер есеп $u_x(0,t)=0$ шартымен берілсе, онда дәл осындай жолмен φ және ψ функцияларын

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi\left(x\right),\ x \geq 0, \\ \varphi\left(-x\right),\ x<0, \end{cases} \qquad \Psi(x) = \begin{cases} \psi\left(x\right),\ x \geq 0, \\ \psi\left(-x\right),\ x<0 \end{cases}$$

түрде жұп жалғастырып, шешімді анықтаймыз

$$u\left(x,t\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[\varphi\left(x+at\right)+\varphi\left(x-at\right)\right]+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi\left(\xi\right)d\xi, \qquad x \geq at,\ t>0, \\ \dfrac{1}{2}\left[\varphi\left(x+at\right)+\varphi\left(at-x\right)\right]+\dfrac{1}{2a}\left[\displaystyle\int\limits_{0}^{x+at}\psi\left(\xi\right)d\xi+\int\limits_{0}^{at-x}\psi\left(\xi\right)d\xi\right], \\ \qquad\qquad x<at,\ t>0. \end{cases} \tag{3.4.59}$$

Мысал 3.4.1. *Жарты өсте берілген Коши есебін шешіңіз:*

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0<x<\infty,\ t>0,\ u(0,t)=0, t>0,$$

$$u(x,0) = x+1,\ u_t\left(x,0\right) = x^2+x,\ x \in [0,\infty).$$

Шешуі. Есеп $u(0,t)=0$ шартымен берілгендіктен, (3.4.58) бойынша

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left((x+at)+1+(x-at)+1\right)+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at}\left(\xi^2+\xi\right)d\xi\ ,\ x \geq at,\ t>0, \\ \dfrac{1}{2}\left((x+at)+1-((at-x)+1)\right)+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{at-x}^{x+at}\left(\xi^2+\xi\right)d\xi, \\ \qquad\qquad 0<x<at,\ t>0. \end{cases}$$

[11] Коши есебі шешімінің жалғыздығы бойынша басқа шешімі жоқ

1. $x \geq at$ болсын.

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[x + at + 1 + x - at + 1] + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \left(\xi^2 + \xi\right) d\xi =$$

$$x + 1 + \frac{1}{2a}\left(\frac{\xi^3}{3} + \frac{\xi^2}{2}\right)\Bigg|_{\xi=x-at}^{\xi=x+at} = x + 1 + t(x + x^2) + \frac{a^2t^3}{3}$$

2. $0 < x < at$ болсын.

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[x + at + 1 - at + x - 1] + \frac{1}{2a}\left[\int\limits_{at-x}^{x+at} \left(\xi^2 + \xi\right) d\xi\right] =$$

$$t + 1 + \tfrac{1}{2a}\left(\frac{\xi^3}{3} + \frac{\xi^2}{2}\right)\Bigg|_{\xi=at-x}^{\xi=x+at} = x + \frac{x^3}{3a} + x(at^2 + t).$$

Демек, шешім

$$u(x,t) = \begin{cases} x + 1 + t\left(x + x^2\right) + \dfrac{a^2t^3}{3}, & x \geq at, \quad t > 0, \\ x + \dfrac{x^3}{3a} + x\left(at^2 + t\right), & x < at, \qquad t > 0. \end{cases}$$

Мысал 3.4.2. *Жарты өсте берілген Коши есебін шешіңіз:*

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx}, \ x > 0, \ t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \ t > 0 \\ u(x,0) = 1 + x^2, \quad u_t(x,0) = x + 2, \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Шешуі. Есеп $u_x(0,t) = 0$ шартымен берілгендіктен, (3.4.59) бойынша

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[1 + (x + at)^2 + 1 + (x - at)^2\right] + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at} (\xi + 2)\, d\xi, \quad x \geq at, \\ \dfrac{1}{2}\left[1 + (x + at)^2 + 1 + (at - x)^2\right] + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{0}^{at-x} (\xi + 2)\, d\xi + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{0}^{x+at} (\xi + 2) d\xi, \\ \qquad x < at. \end{cases}$$

Бұл интегралдарды есептеп, шешімді аламыз:

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 + 2t + xt + x^2 + a^2t^2, & x \geq at, \\ 1 + x^2 + a^2t^2 + \dfrac{1}{2a}\left(4at + x^2 + a^2t^2\right), & x < at. \end{cases}$$

2. Біртекті емес толқындық теңдеуі үшін қойылған Коши есебі. Айталық, біртекті бастапқы және шекаралық шарттармен берілген біртекті емес толқындық теңдеуі үшін жарты өстегі Коши есебін қарастырайық:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \;\; 0 < x < \infty, \;\;\; t > 0, \tag{3.4.60}$$

$$u\,(0,t) = 0, \;\;\; t > 0, \tag{3.4.61}$$

$$u\,(x,0) = 0, \;\; u_t\,(x,0) = 0, \;\;\; 0 \leq x < \infty. \tag{3.4.62}$$

Теңдеудегі $f(x,t)$ функциясын бүкіл $(-\infty,\infty)$ өске тақ жалғастыру арқылы анықтаған

$$F(x,t) = \begin{cases} f(x,t), \;\; x \geq 0, \; t > 0, \\ -f(-x,t), \;\; x < 0, \; t > 0 \end{cases} \tag{3.4.63}$$

функциясы оң жағы болатын, бастапқы шарттары нөлге тең, барлық өсте қойылған келесі көмекші Коши есебін қарастырайық:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + F(x,t), \;\; -\infty < x < \infty, \;\; t > 0, \tag{3.4.64}$$

$$U\,(x,0) = 0, \;\; U_t\,(x,0) = 0, \;\;\; -\infty < x < \infty. \tag{3.4.65}$$

Мұның шешімі Даламбер формуласы бойынша

$$U(x,t) = \frac{1}{2a} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F\,(\xi,\tau)\,d\xi. \tag{3.4.66}$$

(3.4.63) түрдегі анықталған $F(x,t)$ функциясы тақ функция болғандықтан, 3.4.1 - лемманың үшінші тұжырымы бойынша

$$U\,(0,t) = 0. \tag{3.4.67}$$

Демек, (3.4.64)-(3.4.67) теңдіктерден бұл есептің $U\,(x,t)$ шешімі $(0,\infty)$ жарты өсте (3.4.60)-(3.4.62) есептің де шешімі болатынын көруге болады. Себебі $x > 0$ кезде $F(x,t) \equiv f(x,t)$ болғандықтан (3.4.64) теңдеуден

$$U_t = a^2 U_{xx} + f(x,t), \;\; 0 < x < \infty, \;\;\; t > 0,$$

яғни $U\,(x,t)$ функциясы (3.4.60) теңдеуді қанағаттандырады. Ал (3.4.61) және (3.4.62) шарттардың орындалуы сәйкес (3.4.67) және (3.4.65) шарттардан шығады. Олай болса, (3.4.66) формуладан (3.4.63) ескеріп, (3.4.60)-(3.4.62) есебінің шешімін аламыз:

$$u(x,t)=\begin{cases} \dfrac{1}{2a}\int\limits_0^t \mathrm{d}\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi, \quad x\geq at, \quad t>0, \\ \dfrac{1}{2a}\int\limits_0^{t-\frac{x}{a}} d\tau \int\limits_{a(t-\tau)-x}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi + \dfrac{1}{2a}\int\limits_{t-\frac{x}{a}}^{t} d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi, \quad x<at. \end{cases} \tag{3.4.68}$$

Мысал 3.4.3. *Жарты өсте берілген біртекті емес Коши есебін шешіңіз:*

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+x+t, \;\; 0<x<\infty, \quad t>0, \\ u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=0, \;\; 0\leq x<\infty, \\ u(0,t)=0, \quad t>0. \end{cases}$$

Шешуі. Есеп $u(0,t)=0$ шартымен берілгендіктен, теңдеудің оң жағындағы $f(x,t)=x+t$ функциясын барлық $(-\infty,+\infty)$ өске

$$F(x,t)=\begin{cases} x+t, \quad x\geq 0, \\ -(-x+t), \quad x<0 \end{cases}$$

түрде тақ жалғастырып, Даламбер, яғни (3.4.68) формуласын қолданамыз:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F(\xi,\tau)\,d\tau.$$

Енді осы интегралды есептейік:

1. Егер $x-at>0, \quad x>0$ болса, $x-a(t-\tau)=x-at+a\tau>0 \Rightarrow$

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} (\xi+\tau)d\xi d\tau = \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \left(\frac{\xi^2}{2}+\tau\xi\right)\Bigg|_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} d\tau =$$

$$\frac{1}{4a}\int\limits_0^t \left[2ax(t-\tau)+2a\left(t\tau-\tau^2\right)\right]d\tau = \frac{xt^2}{2}+\frac{t^{\,3}}{6}, \quad x\geq at.$$

2. Егер $x-at<0, x>0$ болса, онда

$$u(x,t)=\frac{1}{2a^2}\left[(at+a^2t-x)xt+\frac{x^3}{3a}\right], \quad x<at.$$

Демек, (3.4.72) есептің шешімі

$$u\,(x,t)=\begin{cases}\dfrac{xt^2}{2}+\dfrac{t^{\,3}}{6}, \quad x\ge at,\ t>0,\\ \\ \dfrac{1}{2a^2}\left[(at+a^2t-x)xt+\dfrac{x^3}{3a}\right], \quad x<at.\end{cases} \tag{3.4.69}$$

3. Жалпы түрдегі біртекті емес Коши есебі. Жарты өсте қойылған жалпы түрдегі біртекті емес Коши есебін қарастырайық:

$$\begin{array}{l} u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t),\ \ 0<x<\infty, \quad t>0,\\ u\,(x,0)=\varphi(x), \quad u_t\,(x,0)=\psi(x),\ \ 0\le x<\infty,\\ u\,(0,t)=\mu(t), \quad t>0. \end{array}$$

Бұл есептің шешімін

$$u(x,t)=U+V+W$$

түрде іздейміз, мұндағы U, V және W функциялары сәйкес төмендегі есептердің шешімдері:

$$(U)\ \ \begin{cases} U_{tt}=a^2U_{xx},\ \ 0<x<\infty,\ \ t>0,\\ U\,(x,0)=\varphi(x),\ \ 0\le x<\infty,\\ U_t\,(x,0)=\psi(x),\ \ 0\le x<\infty,\\ U\,(0,t)=0, \quad t>0. \end{cases}$$

$$(V)\ \ \begin{cases} V_{tt}=a^2V_{xx}+f(x,t),\ \ 0<x<\infty,\ \ t>0,\\ V\,(x,0)=0,\ \ 0\le x<\infty,\\ V_t\,(x,0)=0,\ \ 0\le x<\infty,\\ V\,(0,t)=0, \quad t>0. \end{cases}$$

$$(W)\ \ \begin{cases} W_{tt}=a^2W_{xx},\ \ 0<x<\infty, \quad t>0,\\ W\,(x,0)=0, \quad W_t\,(x,0)=0,\ \ 0\le x<\infty,\\ W\,(0,t)=\mu(t), \quad t>0. \end{cases}$$

(U) және (V) есептері жоғарыдағы қарастырылған (3.4.45)-(3.4.47) және (3.4.60)-(3.4.62) есептер. Олардың шешімдері сәйкес (3.4.58), (3.4.68) формулаларымен анықталады. Ал (W) есебінің шешімін «толқынды тарату» әдісі бойынша анықтаймыз, яғни шешімді

$$W(x,t)=g(x-at)$$

түрінде іздейміз, мұндағы $g(x)$ функциясын

$$W(0,t)=\mu(t)$$

шартынан анықтаймыз:

$$g(-at)=\mu(t) \quad\Rightarrow\quad g(t)=\mu(-\frac{t}{a}) \quad\Rightarrow g(x-at)=\mu(t-\frac{x}{a}).$$

Бірақ $\mu\left(t\right)$ функциясы $t>0$ аралықта анықталғандықтан $g(t)$ функциясы $t>\frac{x}{a}$ аралығында ғана анықталады. Ал $W\left(x,0\right)=W_t\left(x,0\right)=0$ шарттары орындалуы үшін $g(x-at)$ функциясын $0\leq t\leq\frac{x}{a}$ аралығында нөлмен жалғастырсақ жеткілікті, яғни:

$$W\left(x,t\right)=\begin{cases}\mu(t-\frac{x}{a}), & t>\frac{x}{a},\\ 0, & 0\leq t\leq\frac{x}{a}.\end{cases} \tag{3.4.70}$$

Мысал 3.4.4. *Жалғастыру әдісі бойынша шешімін табыңыз:*

$$\begin{array}{l} u_{tt}=a^2u_{xx}+x+t,\ \ 0<x<\infty,\ \ t>0,\\ u\left(x,0\right)=\cos(x),\ \ u_t\left(x,0\right)=0,\ \ 0\leq x<\infty,\\ u\left(0,t\right)=t^2,\ \ t>0.\end{array}$$

Шешуі. Есеп $u(0,t)=t^2$ шартымен берілгендіктен, шешімді тақ жалғастыру арқылы шешеміз. Шешімді $u=U+V+W$ түрінде іздейік, мұндағы $U,,V$ және W функциялары сәйкес төмендегі есептердің шешімдері:

$$\begin{cases} U_{tt}=a^2U_{xx},\ \ 0<x<\infty,\ \ t>0,\\ U\left(x,0\right)=\cos(x),\ \ U_t\left(x,0\right)=0,\ \ 0\leq x<\infty,\\ U\left(0,t\right)=0,\ \ t>0.\end{cases} \tag{3.4.71}$$

$$\begin{cases} V_{tt}=a^2V_{xx}+x+t,\ \ 0<x<\infty,\ \ t>0,\\ V\left(x,0\right)=0,\ \ V_t\left(x,0\right)=0,\ \ 0\leq x<\infty,\\ V\left(0,t\right)=0,\ \ t>0.\end{cases} \tag{3.4.72}$$

$$\begin{cases} W_{tt}=a^2W_{xx},\ \ 0<x<\infty,\ \ t>0,\\ W\left(x,0\right)=0,\ \ W_t\left(x,0\right)=0,\ \ 0\leq x<\infty,\\ W\left(0,t\right)=t^2,\ \ t>0.\end{cases} \tag{3.4.73}$$

(3.4.71) есептің шешімі (3.4.58) бойынша:

$$U\left(x,t\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(cos\left(x+at\right)+cos\left(x-at\right)\right), & x\geq at,\ \ t>0,\\ \\ \dfrac{1}{2}\left(cos\left(x+at\right)-cos\left(x-at\right)\right), & x<at,\ \ t>0.\end{cases} \tag{3.4.74}$$

Ал (3.4.72) есеп жоғарыдағы 3.4.3 - мысалда қарастырылған есеп және оның шешімі ((3.4.69)):

$$V\left(x,t\right)=\begin{cases}\dfrac{xt^2}{2}+\dfrac{t}{6}^3, & x\geq at,\ t>0,\\ \\ \dfrac{1}{2a^2}\left[(at+a^2t-x)xt+\dfrac{x^3}{3a}\right], & x<at.\end{cases} \tag{3.4.75}$$

Ал (3.4.73) есептің шешімі (3.4.70) бойынша

$$W(x,t) = \begin{cases} 0, & x \geq at, \\ (t-\frac{x}{a})^2, & x < at. \end{cases} \tag{3.4.76}$$

Енді (3.4.74)-(3.4.76) теңдіктердерді біріктіріп, ізделінді шешімді аламыз:

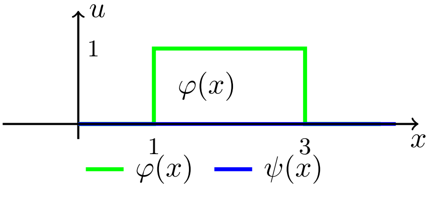
$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(cos\,(x+at) + cos\,(x-at)\right) + \frac{xt^2}{2} + \frac{t^3}{6}, \quad x \geq at, \\ \\ \frac{1}{2}\left(cos\,(x+at) - cos\,(x-at)\right) + \frac{1}{2a^2}\left[(at + a^2t - x)xt + \frac{x^3}{3a}\right] + \\ \\ (t-\frac{x}{a})^2, \quad x < at. \end{cases}$$

Шешімнің физикалық интерпретациясы. Алдыңғы бөлімдегідей жарты өсте қойылған толқындық теңдеу үшін Коши есебінің шешіміні өзгерісін қарастырайық.

Мысал 3.4.5. *Жарты жазықтықта келесі Коши есебі берілсін:*

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \;\; 0 < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = 0, \;\; 0 \leq x < \infty, \\ u(0,t) = 0, \quad t > 0. \end{cases}$$

Мұндағы $\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1, & 1 \leq x \leq 3, \\ 0, & 3 \leq x \end{cases}$, *ягни бастапқы берілгендерінің графигі:*



3.4.1-а сурет.

Бұл есепті Maple бағдарламасы көмегімен зерттейік: *Функция графигін функцияларын қосу:*

```
>  restart: with(plottools): with(plots):
```

Толық өс бойынша шешім:

```
>  u:=(x,t)->(F(x-a*t)+F(x+a*t))/2+int(1/(2*a)*G(v),v=x-a*t..x+a*t);
```

Тақ жұптыққа жалгастыру функцияларын қолданамыз:

```
>  shift:=transform((x,y)->[x,y,-0.1]):
>   oddext0:=proc(expr,var)
>     unapply(signum(var)*unapply(expr,var)(abs(var)),var); end proc:
>  evenext0:=proc(expr,var)
```

> unapply(unapply(expr,var)(abs(var)),var); end proc:

Бастапқы берілген функцияларды енгізу:

> phi := piecewise(x < 1, 0, x < 3, 1, 0); psi:= (x) → 0;

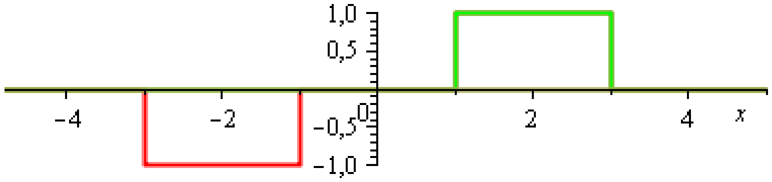
Берілгендерді тақ жалғастыру:

> F := oddext0(phi,x): G := oddext0(psi, x):

Мәндерін беру:

> a:=2: nch:=3: T:=3: ntsteps:=25:

> plot([F(x),phi(x),G(x),psi(x)], x=-5..5, color=[red,green,blue,yellow], thickness=2, scaling=constrained, title="*Бастапқы берілгендер мен тақ жалғасулары*");

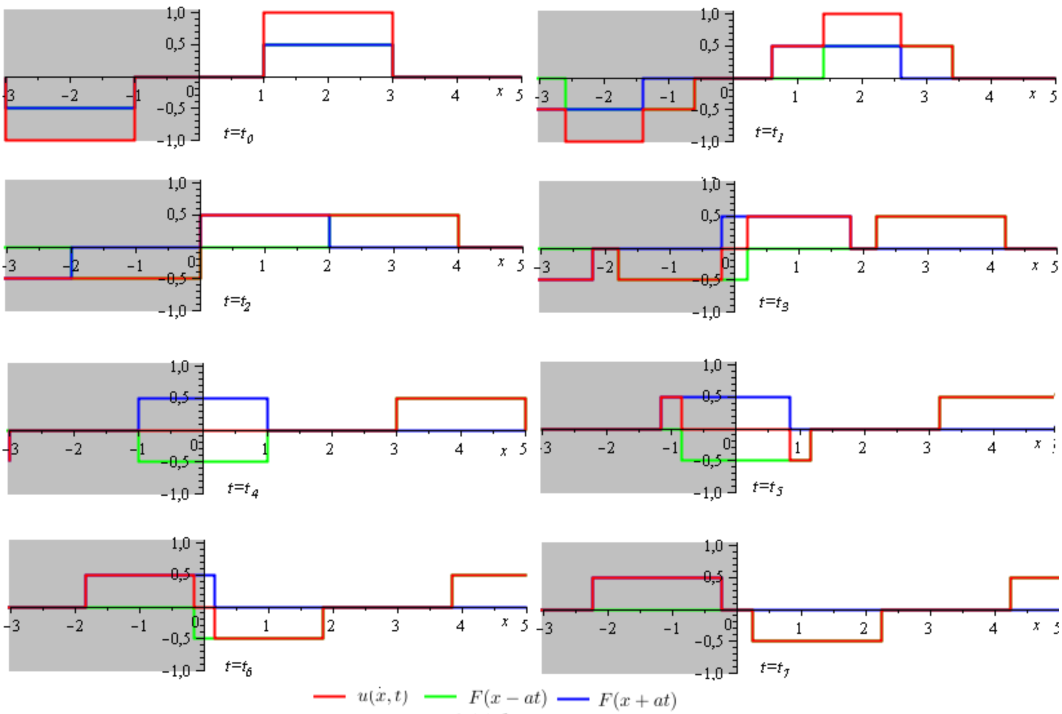


3.4.1-ә сурет.

> F(x): G(x):

> movie:=display([seq(plot([u(x, t/ntsteps), (1/2)*F(x-a*t/ntsteps), (1/2)*F(x+a*t/ntsteps)], x=-5..5, color=[red, green, blue], thickness=2), t=0..T*ntsteps)], scaling=constrained, insequence=true);

> display([movie, rectangle([-5,5], [0,-5], color=grey)], view=[-3..5, -1..1], title="*Шешімнің уақыт бойынша өзгеруі*");



3.4.1-б сурет.

Толқынның таралу процесі 3.4.1-б суретте көрсетілді. Бастапқы кезде толық өстегідей, бастапқы толқын екіге бөлініп оңға және солға қарай тұрақты жылдамдықпен тарайды ($t = t_1$ уақыттағы сурет). Тақ жалғастырылғандықтан мұндай процесстер кері фазамен сол жақта да (сұр түсті облысытағы график) орындалады. Бұл процесс оң жақтан солға қарай таралған жарты толқын мен сол бөліктен кері фазамен оңға таралған жарты толқын $x = 0$ нүктеге жеткенге дейін өзгеріссіз таралады. $x = 0$ нүктеге жеткен мезеттен бастап ($t = t_2$ уақыттағы сурет) жарты толқындардың $x = 0$ бекітілген ұшына шағылуы орын алады. Уақыт өте шағылған жарты толқындардың профилі қысқара бастайды да ($t = t_3$ уақыттағы сурет) біраз уақыттан соң ауытқу нөлге айналады ($t = t_4$ уақыттағы сурет). Бұдан кейін ауытқу кері таңбамен пайда болады ($t = t_5$ уақыттағы сурет). Соңына қарай шағылысқан жарты толқын оңға қарай таралған толқынның жылдамдығымен бірдей жылдамдықпен кері таңбамен оңға таралуын жалғастырады ($t = t_6, t_7$ уақыттағы сурет).

3.4.2. Жылуөткізгіштік теңдеуі үшін жарты өсте қойылған Коши есебі

Жарты өсте қойылған жылуөткізгіштік теңдеуі үшін Коши есебін қарастырайық

$$\begin{aligned} &u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0, \\ &u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,\infty), \\ &u(0,t) = 0 \ \ (\text{немесе} \ \ u_x(0,t) = 0), \quad t > 0, \end{aligned} \tag{3.4.77}$$

мұндағы $u\,(x,t) \in C^{2,1}_{x,t}\,(Q^+)$ шешімді табу керек. Бұл есеп үшін де келесі лемма орынды.

Лемма 3.4.2. *Айталық,*

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), \ x \in (-\infty,+\infty), \ t > 0, \ \ u|_{t=0} = \varphi(x), \ x \in (-\infty,+\infty)$$

Коши есебі берілсін.

- *Егер $f\,(x,t) \equiv 0$ және φ функциясы қандай да бір x_0 нүктеге қатысты тақ (жұп) функция болса, онда осы x_0 нүктеде*

$$u(x_0,t) = 0 \ \ (u_x(x_0,t) = 0). \tag{3.4.78}$$

- *Егер $\varphi \equiv 0$ және $f\,(x,t)$ функциясы қандай да бір x_0 нүктеге қатысты тақ (жұп) функция болса, онда осы x_0 нүктеде*

$$u(x_0,t) = 0 \ \ (u_x(x_0,t) = 0). \tag{3.4.79}$$

Міне, бұл лемма негізінде және Пуассон формуласы арқылы φ және $f(x,t)$ функцияларын тақ немесе жұп жалғастыра отырып, (3.4.77) есепті шешуге болады.

Мысал 3.4.6. *Келесі есепті барлық O_x өсіне қажетті түрде тақ немесе жұп жалғастыра отырып шешіңіз:*

$$\left\{\begin{array}{l} u_t = a^2 u_{xx},\ \ 0 < x < \infty, \ \ \ t > 0, \\ u\left(0, t\right) = 0, \ \ \ t > 0, \\ u\left(x, 0\right) = \varphi\left(x\right), \ \ 0 < x < \infty. \end{array}\right. \tag{3.4.80}$$

Шешуі. Есеп $u\left(0, t\right) = 0$ шартымен берілгендіктен, $\varphi\left(x, t\right)$ функциясын $(-\infty, \infty)$ аралығына тақ жалғастырамыз, яғни

$$\Phi\left(x\right) = \left\{\begin{array}{l} \varphi\left(x\right), \ \ x > 0, \\ -\varphi\left(-x\right), \ \ x < 0. \end{array}\right.$$

Енді $\Phi\left(x\right)$ функциясы бастапқы шарты болатын есеп құрамыз:

$$\begin{array}{l} U_t = a^2 U_{xx},\ \ x \in \left(-\infty, \infty\right),\ t > 0, \\ U\left(x, 0\right) = \Phi\left(x\right),\ \ x \in \left(-\infty, \infty\right). \end{array}$$

Бұл есептің шешімі Пуассон формуласы бойынша

$$U\left(x, t\right) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(y\right) e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} dy$$

және 3.4.2 - лемма бойынша $U(0, t) = 0$. Бұл теңдіктерден, $U\left(x, t\right)$ шешімі $(0, \infty)$ жарты өсте (3.4.80) есептің де шешімі болатынын көреміз $u(x, t) \equiv U(x, t)$, $x > 0$. Олай болса, соңғы интегралды жоғарыдағы енгізуді ескеріп есептейік:

$$u\left(x, t\right) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(y\right) e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} dy = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{0} \Phi\left(y\right) e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} dy +$$

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{0}^{\infty} \Phi\left(\xi\right) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi = \left| \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{y = -z} \\ \multicolumn{2}{c}{dy = -dz} \\ y & z \\ -\infty & \infty \\ 0 & 0 \end{array} \right| =$$

$$-\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{\infty}^{0} \Phi\left(-z\right) e^{-\frac{(x+z)^2}{4a^2 t}} dz + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{0}^{\infty} \Phi\left(\xi\right) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi =$$

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{0}^{\infty} \Phi\left(-z\right) e^{-\frac{(x+z)^2}{4a^2 t}} dz + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{0}^{\infty} \Phi\left(\xi\right) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi =$$

$$-\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{\infty}^{0} \varphi\left(z\right) e^{-\frac{(x+z)^2}{4a^2 t}} dz + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{0}^{\infty} \varphi\left(\xi\right) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi =$$

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{0}^{\infty} \varphi\left(\xi\right) \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right] d\xi.$$

Жауабы:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^{\infty} \varphi(\xi) \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right] d\xi.$$

Мысал 3.4.7. *Келесі есепті барлық O_x өсіне қажетті түрде тақ немесе жұп жалғастыра отырып шешіңіз:*

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \ \ 0 < x < \infty, \quad t > 0 \\ u_x(0,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \ \ 0 < x < \infty. \end{cases}$$

Шешуі. Есеп $u_x(0,t) = 0$ шартымен берілгендіктен $\varphi(x,t)$ функциясын

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), \ \ x \geq 0, \\ \varphi(-x), \ \ x < 0 \end{cases}$$

түрде жұп жалғастырып, жоғарыдағыдай шешімді анықтаймыз:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^{\infty} \varphi(y) \left[e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+y)^2}{4a^2 t}} \right] dy.$$

3.4.3. Жаттығулар

Жалғастыру әдісін қолданып, келесі есептерді шешіңіздер:

3.4.1. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \ \ x > 0, \ t > 0,$
$u(0,t) = 0, \ \ t > 0, \ \ u(x,0) = 1 - e^{-x}, \ u_t(x,0) = \sin x, \ \ x \geq 0.$

3.4.2. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \ \ x > 0, \ t > 0,$
$u_x(0,t) = 0, \ t > 0, \ \ u(x,0) = x^2 - x^3, \ u_t(x,0) = \cos x, \ \ x \geq 0.$

3.4.3. $u_{tt} = u_{xx}, \ \ x \in (0,\infty), \quad t > 0,$
$u_x(0,t) = \sin t, \ t > 0,$
$u(x,0) = \sin x, \ u_t(x,0) = 0, \quad x > 0.$

3.4.4. $u_{tt} = u_{xx}, \ \ x \in (0,\infty), \quad t > 0,$
$u(0,t) = t, \quad t > 0,$
$u(x,0) = 0, \ u_t(x,0) = x^2 + 1, \quad x > 0.$

3.4.5. $u_{tt} = u_{xx}, \ \ x \in (0,\infty), \quad t > 0,$
$u_x(0,t) = 5, \ t > 0,$
$u(x,0) = -3x, \ u_t(x,0) = 0, \quad x > 0.$

3.4.6. $u_t = a^2 u_{xx},\ \ 0 < x < \infty,\ t > 0,$
$u\left(0, t\right) = 0,\ t > 0,\ \ u\left(x, 0\right) = \sin(x),\ x \geq 0.$

3.4.7. $u_t = a^2 u_{xx},\ \ 0 < x < \infty,\ t > 0,$
$u_x\left(0, t\right) = 0,\ t > 0,\ \ u\left(x, 0\right) = \cos(2x),\ x \geq 0.$

3.4.8. $u_t = a^2 u_{xx} + \left(1 + x^2\right) t,\ \ 0 < x < \infty,\ t > 0,$
$u_x\left(0, t\right) = 0,\ t > 0,\ \ u\left(x, 0\right) = 0,\ x \geq 0.$

3.4.9. $u_t = a^2 u_{xx} + x^3 t,\ \ 0 < x < \infty,\ t > 0,$
$u\left(0, t\right) = 0,\ t > 0,\ \ u\left(x, 0\right) = 0,\ x \geq 0.$

3.4.10. $u_t = a^2 u_{xx} + f\left(x, t\right),\ \ 0 < x < \infty,\ t > 0,$
$u\left(0, t\right) = 0,\ t > 0,\ \ u\left(x, 0\right) = 0,\ x \geq 0.$

3.4.11. $u_t = a^2 u_{xx} + f\left(x, t\right),\ \ 0 < x < \infty,\ t > 0,$
$u_x\left(0, t\right) = 0,\ t > 0,\ \ u\left(x, 0\right) = 0,\ x \geq 0.$

3.4.12. $u_{tt} = u_{xx},\ \ x > 0,\ t > 0,\ \ u_x\left(0, t\right) - 2u\left(0, t\right) = te^{-3t},\ \ t \geq 0,$
$u\left(x, 0\right) = 2e^{-x},\ \ u_t\left(x, 0\right) = 0,\ \ x \geq 0.$

3.4.13. $u_{tt} = 4u_{xx},\ \ x > 0,\ \ t > 0,\ \ \left.\left(u_x - u\right)\right|_{x=0} = 2e^{-2t},\ \ t \geq 0,$
$u\left(x, 0\right) = 2\sin x,\ \ u_t\left(x, 0\right) = 0,\ \ x \geq 0.$

3.4.14. $u_{tt} = 4u_{xx},\ \ x > 0,\ t > 0,\ \ u_x\left(0, t\right) - u\left(0, t\right) = e^{-2t},\ t \geq 0,$
$u\left(x, 0\right) = 0,\ \ u_t\left(x, 0\right) = 4e^{-x},\ \ x \geq 0.$

3.4.15. *Айталық, $u\left(x, t\right)$ функциясы*

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ \ x \in \mathbb{R},\ t > 0,\ u\left(x, 0\right) = \varphi\left(x\right),\ u_t\left(x, 0\right) = \psi\left(x\right),\ \ \ x \in R$$

Коши есебінің шешімі болсын. Даламбер формуласын қолдану арқылы
а) егер $\varphi\left(x\right)$ және $\psi\left(x\right)$ тақ функциялар болса, онда $u\left(0, t\right) \equiv 0$;
ә) егер $\varphi\left(x\right)$ және $\psi\left(x\right)$ жұп функциялар болса, онда $u_x\left(0, t\right) \equiv 0$ екендігін дәлелдеңіз.

3.4.4. Жауаптары

3.4.1. $u\left(x, t\right) = \begin{cases} 1 - e^{-x} chat + \frac{1}{2a}\left(\cos\left(x - at\right) - \cos\left(x + at\right)\right), & x > at, \\ e^{-at} shx + \frac{1}{2a}\left(\cos\left(x - at\right) - \cos\left(x + at\right)\right) & x \leq at. \end{cases}$

3.4.2. $u\left(x, t\right) = \frac{1}{2}\left(\left(x + at\right)^2 - \left(x + at\right)^3 + \left(x - at\right)^2 - \left|x - at\right|^3\right) +$
$\dfrac{1}{2a}\left(\sin\left(x + at\right) - \sin\left(x - at\right)\right).$

3.4.3. $u\left(x, t\right) = \begin{cases} \sin x \cos t, & x - t \geq 0, \\ \sin t \cos x + \cos(x - t) - 1, & x - t \leq 0. \end{cases}$

3.4.4. $u\left(x, t\right) = \begin{cases} x^2 t + \frac{1}{3} t^3 + t, & x - t \geq 0, \\ x t^2 + \frac{1}{3} x^3 + t, & x - t \leq 0. \end{cases}$

3.4.5. $u\,(x,t)=\begin{cases} -3x, & x-t\geq 0, \\ 5x-8t, & x-t\leq 0. \end{cases}$

3.4.6. $u\,(x,t)=\sin(x)e^{-a^2t}.$

3.4.7. $u\,(x,t)=\cos(2x)e^{-4a^2t}.$

3.4.8. $u\,(x,t)=\left(1+x^2\right)\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{a^2t^3}{2}.$

3.4.9. $u\,(x,t)=\dfrac{1}{2}x^3t^2+a^2xt^3.$

3.4.10. $u\,(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty\dfrac{f\,(s,t-\tau)}{\sqrt{\tau}}\left[e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2\tau}}-e^{-\frac{(x+s)^2}{4a^2\tau}}\right]dsd\tau.$

3.4.11. $u\,(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty\dfrac{f\,(s,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\left[e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2(t-\tau)}}+e^{-\frac{(x+s)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]dsd\tau.$

3.4.12. $u\,(x,t)=\begin{cases} e^{-x-t}+e^{-x+t}, \ \ 0<t\leq x, \\ e^{-x-t}+3e^{2(x-t)}+(1-x+t)\,e^{3(x-t)}-3e^{(x-t)}, \ \ 0<x<t. \end{cases}$

3.4.13. $u\,(x,t)=\begin{cases} \sin\,(x+2t)+\sin\,(x-2t)\,, \ \ 0<2t\leq x, \\ \sin\,(x+2t)+(2x-4t-1)\,e^{x-2t}+\cos\,(x-2t)\,, \ \ 0<x<2t. \end{cases}$

3.4.14. $u\,(x,t)=\begin{cases} -e^{-x-2t}+e^{-x+2t}, \ \ 0<2t\leq x, \\ -e^{-x-2t}+(1-x+2t)\,e^{x-2t}, \ \ 0<x<2t. \end{cases}$

3.4.15. *Нұсқау: Даламбер формуласына тікелей қойып есептеңіз.*

4 Бөлім

Математикалық физика теңдеулеріне қойылған бастапқы-шеттік есептер. Фурье әдісі

4.1 Фурье әдісінің жалпы сұлбасы. Меншікті мән және меншікті функция туралы есеп

Математикалық физиканың есептерін шешуде жиі қолданатын қарапайым әдістердің бірі – Фурье әдісі, дәлірек айтқанда Фурьенің айнымалыларға жіктеу әдісі. Ол сызықтық біртекті шекаралық есептерді шығаруға қолданылады. Бұл әдістің негізгі идеясы, дербес туындылы дифференциалдық теңдеу үшін қойылған шекаралық есептерді жай дифференциалдық теңдеулер немесе тәуелсіз айнымалылар саны азырақ болатын дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін қойылатын шекаралық есептерге ажырату.

Бұл бөлімде Фурье әдісін қолданып, математикалық физиканың негізгі теңдеулеріне қойылатын шеакаралық, бастапқы-шеттік есептерді шешуді қарастырамыз.

4.1.1. Фурье әдісінің жалпы сұлбасы

Операторлық түрде жазылған

$$\left(\rho\left(x\right)\frac{\partial^k}{\partial t^k}-L\right)u\left(x,t\right)=0,\ \ 0<x<l,\ t>0,\ \ k=0,1,2,\dots \tag{4.1.1}$$

дербес туындылы дифференциалдық теңдеуді,

$$\alpha_1\frac{\partial u}{\partial x}+\beta_1 u\bigg|_{x=0}=0,\quad \alpha_2\frac{\partial u}{\partial x}+\beta_2 u\bigg|_{x=l}=0,\quad t>0, \alpha_i^2+\beta_i^2\neq 0,\ i=1,2 \tag{4.1.2}$$

шекаралық шарттарды және

$$\left.\frac{\partial^i u}{\partial t^i}\right|_{t=0} = \varphi_i(x), \quad i = \overline{0, k-1}, \ \ 0 \le x \le l \tag{4.1.3}$$

бастапқы шарттарды қанағаттандыратын аралас есепті қарастырайық. Мұндағы

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] - q(x)u$$

түрде анықталған дифференциалдық оператор.

Жоғарыдағы (4.1.1) теңдеудегі барлық $p(x),\ q(x),\ \rho(x)$ коэффициенттерін $(0, l)$ аралығында анықталған, жеткілікті тегіс функциялар, нақтырақ айтқанда, мына шарттар орындалсын деп қабылдаймыз:

$$p(x) \in C^1(0,l),\ q(x),\ \rho(x) \in C(0,l), \quad \rho(x) > 0,\ p(x) > 0,\ q(x) \ge 0. \tag{4.1.4}$$

Ескерту 4.1.1. *Егер* (4.1.1) *теңдеуде* $k = 0$ *болса, онда ол эллипстік типті теңдеу,* $k = 1$ *болса параболалық типті, ал* $k = 2$ *болса, гиперболалық типті теңдеу болады. Мәселен,* $k = 0$ *және* $p(x) = 1,\ q(x) = \rho(x) = 1$ *болса, сызықтық емес Пуассон теңдеуін,* $k = 1$ *және* $p(x) = a^2 = const,\ q(x) = 0,\ \rho(x) = 1$ *болса, жылуөткізгіштік теңдеуін, ал* $k = 2$ *және* $p(x) = a^2 = const,\ q(x) = 0,\ \rho(x) = 1$ *болса, толқындық теңдеуін аламыз.*

Ескерту 4.1.2. *Егер* (4.1.2) *шарттарда* $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ *болса, бірінші шекаралық есеп,* $\beta_1 = \beta_2 = 0$ *болса екінші шекаралық есеп, ал* $\alpha_i \ne 0,\ \beta_i \ne 0,\ i = 1, 2$ *болғанда үшінші шекаралық есепті аламыз.*

Фурье әдісінің жалпы сұлбасы. Фурье[1] әдісін тікелей қолдану үшін теңдеудің шекаралық шарттары біртекті (нөлдік) және кейбір аргументтердің өзгеру облысы шенелген болуы қажет. Бұл (4.1.1)-(4.1.3) аралас есебін Фурье әдісі (айнымалыларға жіктеу) бойынша шешу сұлбасы келесі қадамдардан тұрады:

1-қадам. Нөлдік емес шешімді әрбір аргументтеріне жекелей тәуелді функциялардың көбейтіндісі түрінде іздейміз:

$$u\,(x,t) = X\,(x)\,T\,(t) \ne 0. \tag{4.1.5}$$

2-қадам. Бұл (4.1.5) шешімді берілген (4.1.1) теңдеуге қойып, айнымалыларға ажырата отырып, оны жай дифференциалдық теңдеулерге ажыратамыз:

$$\frac{\dfrac{d^kT}{dt^k}}{T(t)} = \frac{\dfrac{d}{dx}\left[p(x)\dfrac{dX}{dx}\right] - q(x)X}{\rho(x)X(x)} \equiv \frac{LX}{\rho(x)X(x)}.$$

[1]JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER (Жан Батист Жозеф Фурье), (1768-1830) – француздық математик әрі физик ғалым. Оның математикада оның ішінде математикалық анализ, интегралдық түрлендірулер, комплекстік анализ және математикалық физиканың көптеген бөлімдеріне қосқан маңызды еңбектері жетерлік.

Соңғы теңдіктіктің сол жағы тек t айнымалыдан, ал оң жағы тек x айнымалыдан тәуелді функциялар болғандықтан, бұл теңдік екі жағы да қандай да бір, айталық, $\lambda = const$ тұрақты санға тең болғанда ғана мағыналы болады. Сондықтан теңдіктің екі жағын жеке-жеке λ санына теңестіріп, келесі жай дифференциалдық теңдеулерге ажыратамыз:

$$\frac{d^kT(t)}{dt^k} = \lambda T(t), \tag{4.1.6}$$

$$LX \equiv \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dX}{dx}\right] - q(x)X = \lambda\rho(x)X(x), \tag{4.1.7}$$

мұндағы λ әзірге белгісіз тұрақты.

3-қадам. (4.1.5) нөлдік емес шешімді (4.1.2) шекаралық шарттарға қойып, (4.1.7) теңдеуі үшін шекаралық шарттар аламыз, яғни

$$\alpha_1 X'(0) + \beta_1 X(0) = 0, \quad \alpha_2 X'(l) + \beta_2 X(l) = 0. \tag{4.1.8}$$

Міне, бұл (4.1.1)-(4.1.3) аралас есебін шешу мәселесі белгісіз λ параметрі бар, жай дифференциалдық теңдеуі үшін (4.1.7)-(4.1.8) шекаралық есебін шешуге келтірілді. Бұл алынған (4.1.7)-(4.1.8) есебін шешу деп әрбір белгісіз λ тұрақты санын және оған сәйкес есептің нөлдік емес $X(x)$ шешімін анықтауды түсінеміз. Мұндай есеп меншікті мән және меншікті функция туралы есеп немесе Штурм[2]-Лиувилль[3] есебі деп аталады. Мұндай λ тұрақтылары Штурм-Лиувилль есебінің *меншікті мәндері*, ал оларға сәйкес $X(x)$ нөлдік емес шешімдері *меншікті функциялары* деп аталады.

4-қадам. Бұл (4.1.7)-(4.1.8) Штурм-Лиувилль есебінің λ_k меншікті мәндері мен $X_k(x)$ меншікті функцияларын анықтап, және әрбір табылған λ_k меншікті мәндерlі (4.1.6) теңдеуге қойып (4.1.6) теңдеудің $T_k(t)$ шешімдерін анықтаймыз.

5-қадам. Бұл анықталған $X_k(x)$ және $T_k(t)$ дербес шешімдерді (4.1.4) қойып және суперпозиция қағидасы бойынша берілген есептің шешімін аламыз:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k T_k(t) X_k(x).$$

Мұндағы A_k белгісіз коэффициенттерді (4.1.3) бастапқы шарттарды қолданып анықтаймыз.

Бұл әдістің нақты есептерге қолданулары алдағы бөлімдерде қарастырылады.

[2]JACQUES CHARLES FRANÇOIS STURM (Шарль Франсуа Штурм) (1803-1855) – Швейцарияда туылған француз математигі. Оның негізгі еңбектері сығылмайтын сұйықтар теориясы, математикалық физика теңдеулері, ЖДТ (Штурм-Лиувилль есебі), сонымен қатар алгебра саласын зерттеуге арналған.

[3] JOSEPH LIOUVILLE (Лиувилль Жозеф) (1809-1882) – француз математигі. Оның еңбектері математиканың әр саласында, атап айтқанда, комплекстік анализде, арнайы функциялар, дифференциалдық геометрия және сандар теориясында маңызды орын алады. Сонымен қатар эллипстік функциялар теориясында, дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептер теориясында да маңызды еңбектері бар.

4.1.2. Штурм-Лиувилль есебі. Меншікті мәндер мен меншікті функциялардың қасиеттері

Жоғарда көрсетілгендей, көптеген математикалық физика теңдеулері үшін бастапқы-шеттік есептерді Фурье әдісімен шешу – Штурм-Лиувилль есебінің меншікті мәндері мен меншікті функцияларын анықтауды және олардың қасиеттерін білуді қажет етеді. Штурм-Лиувилль есебінің қойылымы бастапқы берілген есептің құрылымына тікелей байланысты болады. Жоғарыдағы алынған (4.1.7)-(4.1.8) Штурм-Лиувилль есебі – мұндай есептердің ең қарапайым түрдегі қойылымы. Алда (4.1.7)-(4.1.8) Штурм-Лиувилль есебінің шешілу мәселесін және оның меншікті мәндері мен меншікті функцияларының қасиеттерін зерттейміз.

1. Штурм-Лиувилл есебі. (4.1.7)-(4.1.8) Штурм-Лиувилль есебін қарастырайық:

$$LX \equiv \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dX}{dx}\right] - q(x)X = \lambda\rho(x)X(x), \tag{4.1.9}$$

$$\alpha_1 X'(0) + \beta_1 X(0) = 0, \quad \alpha_2 X'(l) + \beta_2 X(l) = 0, \delta_i^2 + h_i^2 \neq 0, \ i = 1, 2. \tag{4.1.10}$$

Штурм-Лиувилль есебі шекаралық шарттың түріне және $p(x)$ коэффициентінің өзгерісіне байланысты *регулярлы*, *периодты* және *сингулярлы* болып бөлінеді.

Егер (4.1.4) шарт орындалса, (4.1.9)-(4.1.10) есебі регулярлы Штурм-Лиувилль есебі болады.

Егер (4.1.10) шекаралық шарт

$$p(a) = p(b), \ X(a) = X(b), \ \ X'(a) = X'(b)$$

периодты шартпен берілсе, онда (4.1.9)-(4.1.10) есебі периодты Штурм-Лиувилль есебі болады.

Егер (4.1.9) теңдеудің $p(x)$ коэффициенті берілген $[a, b]$ аралығының шеткі нүктелерінің біреуінде немесе екеуінде де нөлге айналса, яғни $p(a) = 0$ немесе $p(b) = 0$ болса, онда (4.1.9)-(4.1.10) есебі сингулярлы Штурм-Лиувилль есебі болады. Мәселен,

1. Егер $p\left(x\right) = x, \ q\left(x\right) = \dfrac{\nu^2}{x}, \ \rho\left(x\right) = x \ \ a = 0, \ b = l$ болса, онда

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

Бессель теңдеуін аламыз және оның меншікті функциялары Бессель функциялары болады.

2. Егер $p\left(x\right) = 1 - x^2, \ q\left(x\right) = 0, \ \ \rho\left(x\right) = 1 \ \ a = -1, \ b = 1$ болса, онда

$$\left[\left(1 - x^2\right) y^{'}\right]^{'} + \lambda y = 0$$

Лежандр теңдеуі үшін Штурм-Лиувилль есебіне келеміз және оның меншікті функциялары Лежандр полиномдары болады. Мұндай мысалдарды көптеп келтіруге болады. Сингулярлы Штурм-Лиувилль есебін зерттеу арнайы функциялар теориясында қарастырылады[4]. Бұл оқу құралында тек регулярлы немесе периодты жағдайлар қарастырылады.

Мысал 4.1.1. *Штурм-Лиувилль есебін шешіңіз*

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \;\; X(0) = 0, \;\; X(l) = 0.$$

Шешуі. Бұл есеп (4.1.9)-(4.1.10) есебінің $p(x) = 1, \; q(x) = 0, \; \rho(x) = 1,$ $\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \; \beta_1 = \beta_2 = 1$ кездегі дербес жағдайы.

1. Айталық, $\lambda = 0$ болсын. Онда жалпы шешімі $X(x) = C_1 x + C_2$ болады. Ал бұған шекаралық шарттарды қолдансақ, онда $C_1 = C_2 = 0$ болады да, $X(x) \equiv 0$ нөлдік шешімді аламыз.

2. $\lambda < 0$ теріс сан болсын. Онда оның жалпы шешімі

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

болады және шекаралық шарттарды қолдансақ

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0 \end{cases}$$

жүйесін аламыз. Бұл жағдайда да $C_1 = C_2 = 0$ болғандықтан $X(x) \equiv 0$ нөлдік шешімге келеміз, яғни есептің меншікті функциялары болмайды.

3. $\lambda > 0$ оң сан болсын. Онда жалпы шешімі

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$$

түрде болады. Бұған шекаралық шарттарды қолдансақ

$$X(0) = C_1 = 0 \text{ және } X(l) = C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0$$

болады. Мұнда егер $C_2 = 0$ болса $X(x) \equiv 0$ нөлдік шешімге келеміз. Сондықтан

$$\sin\sqrt{\lambda}l = 0$$

және $C_2 \neq 0$ еркін тұрақты. Оны ыңғайлылық үшін $C_2 = 1$ деп алуға болады. Соңғы теңдеуден λ тапсақ:

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2, \; k = 1, 2, 3, ...$$

Демек, бұған сәйкес нөлдік емес шешімі (Штурм-Лиувилль есебінің меншікті функциялары)

$$X_k(x) = \sin\frac{\pi k}{l}x, \quad k = 1, 2, 3, ...$$

болады.

[4]Ш. Сахаев, Х. Хомпыш, Арнайы функциялар және олардың қолданулары, Алматы, Қазақ университеті, 2012. Оқу құралы

Мысал 4.1.2. *Штурм-Лиувилль есебін шешіңіз:*

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \;\; X'(0) = 0, \;\; X'(l) = 0.$$

Шешуі. Бұл есеп – (4.1.9)-(4.1.10) есебінің $p(x) = 1, \; q(x) = 0, \;\; \rho(x) = 1$ $\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \; \beta_1 = \beta_2 = 0$ кездегі дербес жағдайы. Алдыңғы мысалдағыдай талдай келе, бұл есептің меншікті сандары мен меншікті функциялары

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2, X_k(x) = \cos\frac{\pi k}{l}x, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

болатынын көреміз. Бұл мысалда $\lambda_0 = 0$ саны да меншікті сан болады және оған сәйкес меншікті функция $X_0(x) = 1$ болады.

Дәл осы сияқты, алда жиі кездесетін бірнеше Штурм-Лиувилль есебінің меншікті мәндері мен меншікті функцияларын кесте түрінде көрсетуге болады.

1-кесте.

$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$ есебінің меншікті мәндері мен меншікті функциялары

Шекаралық шарттар	Меншікті сандар	Меншікті функциялар мен нормасы
$X(0) = 0, \, X(l) = 0$	$\lambda_k = \frac{\pi k}{l}, \, k = 1, 2, 3, \ldots$	$X_k(x) = \sin\frac{\pi k}{l}x,$ $\Vert X_k\Vert^2 = \frac{l}{2}, \, k = 1, 2, 3, \ldots$
$X'(0) = 0, \, X(l) = 0$	$\lambda_k = \frac{(2k+1)\pi}{2l},$ $k = 0, 1, 2, \ldots$	$X_k(x) = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2l}x,$ $\Vert X_k\Vert^2 = \frac{l}{2}, \;\; k = 0, 1, 2, \ldots$
$X(0) = 0, \, X'(l) = 0$	$\lambda_k = \frac{(2k+1)\pi}{2l},$ $k = 0, 1, 2, \ldots$	$X_k(x) = \sin\frac{(2k+1)\pi}{2l}x,$ $\Vert X_k\Vert^2 = \frac{l}{2}, \;\; k = 0, 1, 2, \ldots$
$X'(0) = 0, \, X'(l) = 0$	$\lambda_k = \frac{\pi k}{l}, \, k = 0, 1, 2, \ldots$	$X_k = \cos\frac{\pi k}{l}x, \;\; k = 0, 1, \ldots$ $\Vert X_0\Vert^2 = l,$ $\Vert X_k\Vert^2 = \frac{l}{2}, \; k = 1, 2, 3, \ldots$

Мысал 4.1.3. *Штурм-Лиувилль есебін шешіңіз:*

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \;\; X(0) = X(l), \;\; X'(0) = X'(l).$$

Шешуі. Бұл есептің де нөлдік емес шешімі тек $\lambda > 0$ жағдайда ғана бар болады және жалпы шешімі:

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x.$$

Бұған периодтық шарттарды қолдансақ,

$$\begin{cases} C_1 = C_1 \cos\sqrt{\lambda}l + C_2 \sin\sqrt{\lambda}l \\ C_2\sqrt{\lambda} = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} C_1\left(1-\cos\sqrt{\lambda}l\right)=C_2\sin\sqrt{\lambda}l \\ C_2\left(1-\cos\sqrt{\lambda}l\right)=-C_1\sin\sqrt{\lambda}l. \end{cases}$$

Бірінші теңдеуден C_2 тауып, екінші теңдеуге қойсақ, нәтижеде

$$C_1\left(1-\cos\sqrt{\lambda}l\right)=0$$

теңдеуін аламыз. Егер $C_1=0$ болса, онда $C_2=0$ болады да $X(x)\equiv 0$ нөлдік шешімге келеміз. Сондықтан $C_i\neq 0,\ \ i=1,2$ және

$$1-\cos\sqrt{\lambda}l=0$$

теңдігінің орындалуы қажет. Ал бұл теңдеудің шешімдері тек $\sqrt{\lambda}l=\pm 2\pi k$ болса ғана бар болады, яғни меншікті сандары

$$\lambda_k=\left(\frac{2\pi k}{l}\right)^2,\ k=0,1,2,...$$

Ал бұларға сәйкес меншікті функциялар

$$X_k(x)=C_1\cos\frac{2\pi k}{l}x+C_2\sin\frac{2\pi k}{l}x,\quad k=0,1,2,....$$

Мұндағы C_1 және C_2 еркін тұрақтылар болғандықтан, меншікті функциялар

$$X_{1k}(x)=\cos\frac{2\pi k}{l}x,\ \ X_{2k}(x)=\sin\frac{2\pi k}{l}x,\quad k=0,1,2,....$$

жүйесі болады.

Мысал 4.1.4. *Штурм-Лиувилль есебін шешіңіз:*

$$\begin{array}{l} X''(x)+\lambda X(x)=0,\ \ 0<x<1, \\ X(0)-X'(0)=0,\ \ X(1)+X'(1)=0. \end{array}$$

Шешуі. Бұл есептің де $\lambda\leq 0$ жағдайда нөлдік шешімге ие болатынын оңай көруге болады. Айталық, $\lambda>0$ болсын. Жалпы шешімі

$$X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x.$$

Бұдан шекаралық шарттарды қолдансақ,

$$\begin{cases} C_1-C_2\sqrt{\lambda}=0 \\ C_1\cos\sqrt{\lambda}+C_2\sin\sqrt{\lambda}-\sqrt{\lambda}C_1\sin\sqrt{\lambda}+\sqrt{\lambda}C_2\cos\sqrt{\lambda}=0 \end{cases}$$

жүйесін аламыз. Бірінші теңдеуден C_1 тауып, екіншісіне қойсақ:

$$C_2\left[2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}+(1-\lambda)\sin\sqrt{\lambda}\right]=0.$$

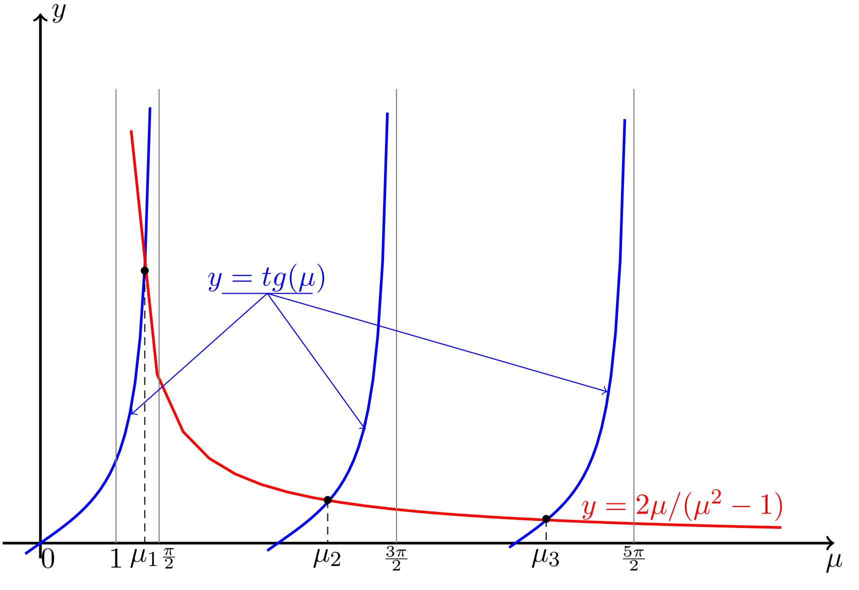
Бұдан $C_2=0$ болса, нөлдік шешімге келеміз. Сондықтан

$$2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}+(1-\lambda)\sin\sqrt{\lambda}=0$$

немесе $\mu = \sqrt{\lambda}$ белгілеу енгізсек, нәтижеде

$$tg\mu_k = \frac{2\mu_k}{\mu_k^2 - 1}$$

теңдеуін аламыз. Бұл теңдеудің шешімдерін аналитикалық түрде таба алмаймыз. Алайда оның шексіз көп шешімдері болатындығын оның графигінен көреміз және оларды сандық шешу әдістері арқылы жуықтап табуға болады.



4.1.2-а сурет.

Графиктік тәсіл бойынша, $y = tg\mu$ және $y = \dfrac{2\mu}{\mu^2-1}$ функцияларының графиктерінің қиылысу нүктелері $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ ізделінді $tg\mu = \dfrac{2\mu}{\mu^2-1}$ теңдеуінің шешімдерін береді. 4.1.2-а суреттен көріп тұрғанымыздай, мұндай қиылысу нүктелері шексіз көп.

2. Меншікті мәндер мен меншікті функциялардың негізгі қасиеттері. Бұл бөлімде (4.1.9)-(4.1.10) Штурм-Лиувилль есебінің меншікті мәндері мен меншікті функцияларының алда қолданатын негізгі қасиеттерін дәлелдеусіз келтіреміз. Дәлелдеулерін негізгі әдебиеттердің[5] кез келгенінен табуға болады. Ал (4.1.9)-(4.1.10) есептің λ мәндерін сәйкес нөлге тең емес шешімдерінің бар екенін вариациялық немесе интегралдық теңдеулер әдістерімен дәлелдеуге болады.

Қасиеттері:

1^0. Штурм-Лиувилль есебінің шексіз көп саналымды $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ меншікті мәндері бар болады және оларды өсу ретімен орналастыруға

[5] А.Н.Тихонов, А.А.Самарский Уравнений математической физики, М. 1972 және т.б.

болады:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots .$$

2^0. Меншікті мәндер нақты және теріс емес

$$\lambda_k \geq 0, \;\; \lambda_k \in R, \;\; k = 1, 2, 3, \dots .$$

3^0. Әрбір λ_k меншікті мәнге бір ғана (тұрақты санға көбейту дәлдігіне дейін) $X_k(x)$ меншікті функция сәйкес келеді. Басқаша айтқанда, егер λ_k меншікті мәнге сәйкес меншікті функция $X_k(x)$ болса, онда $C \cdot X_k(x)$, $C = const$ функциясы да сол λ_k меншікті мәнге сәйкес меншікті функция болады. Егер λ_k меншікті мәнге сәйкес r сызықты тәуелсіз меншікті функциялар болса, онда олардың сызықты комбинациясы да меншікті функция болады.

4^0. Егер λ_k меншікті мәнге сәйкес меншікті функция $X_k(x) = X_{1k}(x) + iX_{2k}(x)$ комплекс айнымалы функция болса, мұндағы i – жорамал бірлік, онда оның нақты және жорамал бөліктері де сол λ_k меншікті мәнге сәйкес меншікті функциялары болады.

5^0. Штурм-Лиувилль есебінің әр түрлі λ_k және λ_m меншікті мәндеріне сәйкес $X_k(x)$ және $X_m(x)$ меншікті функциялары $\rho(x)$ салмақ функциясына қатысты $[0, l]$ аралығында ортоганальды болады:

$$\int_0^l \rho(x) X_k(x) X_m(x) dx = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ \|X_k\|^2, & k = m. \end{cases}$$

6^0. В.А. Стеклов[6] теоремасы:

Теорема 4.1.1. (4.1.9) *шекаралық шартты қанағаттандыратын кезкелген* $f(x) \in C^2(0, l) \bigcap C^1[0, l]$ *функциясы* (4.1.9)-(4.1.10) *есебінің* $\{X_k\}$ *меншікті функциялар жүйесі бойынша абсалютті және бірқалыпты жинақты Фурье қатарына жіктеледі, яғни*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k X_k(x), \tag{4.1.11}$$

мұндағы

$$f_k = \frac{1}{\|X_k\|^2} \int_0^l \rho(x) f(x) X_k(x) dx$$

Фурье коэффициенті деп аталады және

$$\|X_k\|^2 = \int_0^l \rho(x) X_k^2(x) dx.$$

[6] Владимир Андреевич Стеклов, (1863-1926) – орыс математигі әрі механигі. Оның негізгі еңбектері математикалық физика теңдеулері, механика, жуықтау теориясы, асимптотикалық әдістер және ортогональ функциялар жүйесінің толықтығы теориясын зерттеуге арналған.

4.1.3. Жаттығулар

Төмендегі Штурм-Лиувилль есебінің меншікті мәндері мен меншікті функцияларын және нормасын анықтаңыз:

4.1.1. $\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X'(0) = X'(\pi) = 0. \end{cases}$

4.1.2. $\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X(-\pi) = X(\pi), \quad X'(-\pi) = X'(\pi). \end{cases}$

4.1.3. $\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X(l) = 0, \quad \int\limits_0^l X(x)\,dx = 0. \end{cases}$

4.1.4. $\begin{cases} X'' - 2X' + \left(\lambda^2 + 1\right) X = 0, \\ X(0) = X(1) = 0. \end{cases}$

Төмендегі меншікті мәндер және меншікті функцияларды табу есебін шешіңіз ($y(x) \neq 0, \quad \|y(x)\| = 1$):

4.1.5. $\begin{cases} -y''(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0,1), \\ y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0. \end{cases}$

4.1.6. $\begin{cases} -y''(x) = \lambda y(x), \quad x \in (-l,l), \\ y(-l) = 0, \quad y(l) = 0. \end{cases}$

4.1.7. $\begin{cases} -y''(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0,\pi), \\ y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0. \end{cases}$

4.1.8. $\begin{cases} -y''(x) = \lambda y(x), \quad x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right), \\ y'(0) = 0, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0. \end{cases}$

4.1.9. $\begin{cases} -y''(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0,l), \\ y(0) = 0, \quad \alpha y(l) + y'(l) = 0, \quad \alpha > 0. \end{cases}$

4.1.10. $\begin{cases} -y''(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0,l), \\ y'(0) = 0, \quad y(l) + \beta y'(l) = 0, \quad \beta > 0. \end{cases}$

4.1.11. $\begin{cases} -y''(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0,1), \\ y(0) = \beta y'(0), \quad \beta > 0, \quad y(1) = 0. \end{cases}$

4.1.12. $\begin{cases} -y''(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0,1), \\ y(0) = y'(0), \quad \beta > 0, \quad y(1) = y'(1). \end{cases}$

4.1.13. *Лаплас операторы үшін* $Q = \{(x,y) : 0 < x < a, \ 0 < y < b\}$ *тіктөртбұрышта берілген келесі есептің меншікті мәндері мен меншікті функцияларын табыңыз* ($u(x,y) \neq 0, \quad \|u\| = 1$)*:*

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = \lambda u(x,y), \quad (x,y) \in Q, \\ u(0,y) = 0, \quad u_x(a,y) = 0, \quad 0 < y < b, \\ u_y(x,0) = 0, \quad u(x,b) = 0, \quad 0 < x < a. \end{cases}$$

4.1.14. $\begin{cases} -\Delta u\,(x,y) = \lambda u\,(x,y)\,, \quad (x,y) \in Q, \\ u\,(0,y) = 0, \quad u\,(a,y) = 0, \quad 0 < y < b, \\ u_y\,(x,0) = 0, \quad u_y\,(x,b) = 0, \quad 0 < x < a. \end{cases}$

4.1.15. *Лаплас операторы үшін $Q = \{(x,y,z) : 0 < x < a,\ 0 < y < b,\ 0 < z < c\}$ тіктөртбұрышты параллелепипедте берілген келесі есептің меншікті мәндері мен меншікті функцияларын табыңыз ($u(x,y,z) \neq 0, \quad \|u\| = 1$):*

$$\begin{cases} -\Delta u\,(x,y,z) = \lambda u\,(x,y,z)\,, \quad (x,y) \in Q, \\ u\,(x,y,z) = 0, \quad (x,y,z) \in Q. \end{cases}$$

4.1.4. Жауаптары

4.1.1. $\lambda_0 = 0,\ \ X_0\,(x) = 1,\ \|X_0\,(x)\|^2 = \pi,$
$\lambda_k = k,\ \ X_k\,(x) = \cos kx,\ \|X_k\,(x)\|^2 = \frac{\pi}{2},\ \ k = 1,2,3,\ldots.$

4.1.2. $\lambda_0 = 0,\ \ X_0\,(x) = 1,\ \|X_0\,(x)\|^2 = 2\pi,$
$\lambda_k = k,\ \ X_{1k} = \cos kx,\ \ X_{2k} = \sin kx,\ \ \|X_k\,(x)\|^2 = \pi,\ \ k = 1,2,3,\ldots.$

4.1.3. $\lambda_k = \frac{2\pi k}{l},\ \ X_k = \sin\frac{2\pi k}{l}x,\ \ \|X_k\,(x)\|^2 = \frac{l}{2},\ \ k = 1,2,3,\ldots.$

4.1.4. $\lambda_k = \pi k,\ \ X_k\,(x) = e^x \sin \pi k x,\ \ \|X_k\,(x)\|^2 = \frac{e^2-1}{4},\ \ k = 1,2,3,\ldots.$

4.1.5. $\lambda_k = (\pi k)^2\,,\ y_0\,(x) = 1,\ y_k\,(x) = \sqrt{2}\cos \pi k x,\ k = 1,2,3,\ldots.$

4.1.6. $\lambda_k = \left(\dfrac{\pi k}{2l}\right)^2,\quad y_k\,(x) = \dfrac{1}{\sqrt{l}}\sin\dfrac{\pi k(x+l)}{2l},\ k = 1,2,3,\ldots.$

4.1.7. $\lambda_k = \left(k + \dfrac{1}{2}\right)^2,\quad y_k\,(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sin\left(k + \dfrac{1}{2}\right)x,\ k = 0,1,2,\ldots.$

4.1.8. $\lambda_k = (2k+1)^2\,,\quad y_k\,(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\cos\,(2k+1)\,x,\ k = 0,1,2,\ldots.$

4.1.9. $\lambda_k = \left(\dfrac{\omega_k}{l}\right)^2,\quad y_k\,(x) = \sqrt{\dfrac{2\left(\alpha^2 l^2 + \omega_k^2\right)}{l\left(\alpha^2 l^2 + \alpha l + \omega_k^2\right)}}\sin\dfrac{\omega_k x}{l},\ \ k = 1,2,3,\ldots,$

мұндағы $\omega_k > 0$ трансценденттік $\tan\omega = -\dfrac{\omega}{\alpha l}$ теңдеуінің k-шы түбірі.

Үлкен k мәндерінде: $\lambda_k \approx \left[\dfrac{\pi}{l}\left(k - \dfrac{1}{2}\right)\right]^2,\quad y_k\,(x) \approx \sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\dfrac{\pi}{l}\left(k - \dfrac{1}{2}\right)x.$

4.1.10. $\lambda_k = \left(\dfrac{\omega_k}{l}\right)^2,\quad y_k\,(x) = \sqrt{\dfrac{2\left(l^2 + \beta^2\omega_k^2\right)}{l\left(l^2 + l\beta + \beta^2\omega_k^2\right)}}\cos\dfrac{\omega_k x}{l},\ \ k = 1,2,3,\ldots,$

мұндағы $\omega_k > 0$ трансценденттік $\tan\omega = \dfrac{l}{\beta\omega}$ теңдеуінің k - түбірі.

Үлкен k мәндерінде: $\lambda_k \approx \left(\dfrac{\pi\,(k-1)}{l}\right)^2,\quad y_k\,(x) \approx \sqrt{\dfrac{2}{l}}\cos\dfrac{\pi\,(k-1)\,x}{l}.$

4.1.11. $\lambda_k = \omega_k^2, \quad y_k\left(x\right) = \sqrt{\dfrac{2}{1+\beta^2\omega_k^2}}\left(\beta\omega_k \cos\omega_k x + \sin\omega_k x\right), \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$

мұндағы $\omega_k > 0$ *трансценденттік* $\tan\omega = -\beta\omega$ *теңдеуінің* k*-шы түбірі.*

Үлкен k *мәндерінде:* $\lambda_k \approx \left[\pi\left(k-\dfrac{1}{2}\right)\right]^2, \quad y_k\left(x\right) \approx \sqrt{2}\cos\pi\left(k-\dfrac{1}{2}\right)x.$

4.1.12. $\lambda_0 = -1, \quad y_0\left(x\right) = \dfrac{e^x}{\sqrt{e\sinh 1}};$

$\lambda_k = (\pi k)^2, \quad y_k\left(x\right) = \sqrt{\dfrac{2}{1+\pi^2k^2}}\left(\pi k\cos\pi kx + \sin\pi kx\right), \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$

Үлкен k *мәндерінде:* $y_k\left(x\right) \approx \sqrt{2}\cos\pi kx.$

4.1.13. $\lambda_{mn} = \left(\dfrac{\pi(2m+1)}{2a}\right)^2 + \left(\dfrac{\pi(2n+1)}{2b}\right)^2, \quad m, n = 1, 2, 3, \ldots,$

$u_{mn}\left(x, y\right) = \dfrac{2}{\sqrt{ab}}\sin\dfrac{\pi(2m+1)x}{2a}\cdot\cos\dfrac{\pi(2n+1)y}{2b}, \quad m, n = 1, 2, 3, \ldots.$

4.1.14. $\lambda_{mn} = \left(\dfrac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{\pi n}{b}\right)^2, \quad m = 1, 2, 3, \ldots, \quad n = 0, 1, 2\ldots,$

$u_{m0}\left(x, y\right) = \sqrt{\dfrac{2}{ab}}\sin\dfrac{\pi mx}{a}, \quad u_{mn}\left(x, y\right) = \dfrac{2}{\sqrt{ab}}\sin\dfrac{\pi mx}{a}\cdot\cos\dfrac{\pi ny}{b}, \quad m, n = 1, 2, 3, \ldots.$

4.1.15. $\lambda_{klm} = \left(\dfrac{\pi k}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{\pi l}{b}\right)^2 + \left(\dfrac{\pi m}{c}\right)^2, \quad k, l, m = 1, 2, 3, \ldots,$

$u_{klm}\left(x, y, z\right) = \sqrt{\dfrac{8}{abc}}\sin\dfrac{\pi kx}{a}\sin\dfrac{\pi ly}{b}\sin\dfrac{\pi mz}{c}, \quad k, l, m = 1, 2, 3, \ldots.$

4.2 Толқындық теңдеу үшін қойылған бастапқы-шеттік есептер

Бұл бөлімде толқындық теңдеулер үшін әр түрлі қойылымдағы бастапқы-шеттік есептерді Фурье әдісін қолданып шешу қарастырылады.

4.2.1. Біртекті толқындық теңдеуі үшін қойылған бастапқы-шеттік есептер

Біртекті толқындық теңдеуі үшін біртекті (нөлдік) шекаралық шартпен берілген

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < l,\ t > 0, \tag{4.2.12}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t > 0, \tag{4.2.13}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),\ \ 0 \le x \le l \tag{4.2.14}$$

бастапқы-шеттік (аралас) есепті шешуді қарастырайық.

Бұл (4.2.12)-(4.2.14) есебін Фурьенің айнымалыларға жіктеу әдісін қолданып шешеміз. Ол үшін келесі қадамдары жасаймыз:

1-қадам. Жай дифференциалдық теңдеулерге ажырату. Бұл (4.2.12)-(4.2.14) есебінің нөлдік емес шешімін Фурье әдісі бойынша

$$u(x,t) = X\,(x)\,T(t) \neq 0 \tag{4.2.15}$$

түрінде іздейміз. Бұдан x және t айнымалылары бойынша

$$u_{xx}(x,t) = X''\,(x)\,T(t),\ \ u_{tt}(x,t) = X\,(x)\,T''(t)$$

екінші ретті дербес туындыларын есептеп, (4.2.12) теңдеуге қоямыз:

$$X\,(x)\,T''(t) = a^2 X''\,(x)\,T(t).$$

Бұл теңдеуді екі жағын (4.2.15) қабылдауымыз бойынша $a^2 X\,(x)\,T(t)$ бөлсек

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''\,(x)}{X\,(x)} \tag{4.2.16}$$

теңдігін аламыз. Бұл теңдіктің оң жағы тек x айнымалысынан, ал сол жағы тек t айнымалысынан тәуелді. Егер бір айнымалысын тұрақтандырып, екінші айнымалысын өзгертсек, мәселен, x айнымалысын бекітіп қойып, t айнымалысын өзгертсек, оның мәндері өзгеріссіз болар еді. Демек, (4.2.16) теңдік екі жағы қандайда бір тұрақты санға тең болған жағдайда ғана орындалады, яғни

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \mu. \qquad (4.2.17)$$

Мұның екі жағын жеке-жеке μ -ға теңестіріп,

$$T''(t) - \mu a^2 T(t) = 0, \qquad (4.2.18)$$

$$X''(x) - \mu X(x) = 0 \qquad (4.2.19)$$

екі жай дифференциалдық теңдеулерге жіктейміз. Мұндағы μ – кез келген тұрақты сан.

2-қадам. Штурм-Лиувилль есебін шешу. Енді (4.2.15) түрдегі ізделінді шешімді (4.2.13) шекаралық шарттарға қоямыз:

$$u(0,t) = X(0)\,T(t) = 0, \;\; u(l,t) = X(l)\,T(t) = 0.$$

Мұнда $T(t) \neq 0$ болатындықтан ((4.2.15)- ті қараңыз)

$$X(0) = 0, \;\; X(l) = 0 \qquad (4.2.20)$$

шекаралық шарттары алынады. Демек, $X(x)$ функциясы (4.2.19)-(4.2.20) есебінің нөлдік емес шешімі екен. Бұл алынған (4.2.19)-(4.2.20) есебінің μ тұрақтысына сәйкес нөлдік емес шешімін табу *Штурм-Лиувилль есебі* деп аталады. Ал оның μ - ға сәйкес $X(x)$ нөлдік емес шешімі *меншікті функциялар*, ал сәйкес сол μ тұрақтылары *меншікті мәндері* деп аталады. Бұл есептің шешімдері μ тұрақтысына байланысты. Сол жағдайларды қарастырайық:

1. Айталық, $\mu = 0$ болсын. Онда (4.2.19) теңдеудің жалпы шешімі

$$X(x) = C_1 x + C_2.$$

Бұған (4.2.20) шарттарды қолдансақ, онда $C_1 = C_2 = 0$ болады, демек, $X(x) \equiv 0$ нөлдік шешімді аламыз.

2. $\mu = \lambda^2 > 0$ оң болсын. Онда (4.2.19) теңдеудің шешімі:

$$X(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}.$$

Егер бұған (4.2.20) шарттарды қолдансақ

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{\lambda l} + C_2 e^{-\lambda l} = 0 \end{cases}$$

теңдеулер жүйесін аламыз. Бұдан $C_1 = C_2 = 0$ болады, яғни бұл жағдайда да $X(x) \equiv 0$ нөлдік шешімге келеміз.

3. $\mu = -\lambda^2 < 0$ теріс сан болсын. Бұл жағдайда (4.2.19) теңдеудің жалпы шешімі

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

Бұған (4.2.20) шарттарды қолдансақ, $X(0) = C_1 = 0$ және $X(l) = C_2 \sin \lambda l = 0$ болады. Мұнда, егер $C_2 = 0$ болса, $X(x) \equiv 0$ нөлдік шешімге келеміз. Сондықтан C_2 еркін тұрақты болғандықтан, оны ыңғайлылық үшін $C_2 = 1$ деп алып λ табамыз:

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{l},\ k = 1, 2, 3, ... \tag{4.2.21}$$

Демек, (4.2.19)-(4.2.20) есебінің нөлдік емес шешімі (Штурм-Лиувилль есебінің меншікті функциялары) тек $\mu = -\lambda^2 < 0$ теріс сан болған кезде ғана бар болады екен және олар

$$X_k(x) = \sin \frac{\pi k}{l} x, \quad k = 1, 2, 3, ... \tag{4.2.22}$$

тең болады.

Енді жоғарыдағы (4.2.18) жай дифференциалдық теңдеудің $\mu = -\lambda_k^2$ меншікті мәндеріне сәйкес жалпы шешімін табамыз:

$$T_k(t) = A_k \cos \frac{\pi k}{l} at + B_k \sin \frac{\pi k}{l} at, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{4.2.23}$$

мұндағы $A_k,\ B_k$ – еркін тұрақты сандар, ал индекс қойылу себебі әрбір λ_k үшін жеке шешімдер аламыз. Ал (4.2.15) келісім бойынша есептің әрбір λ_k сәйкес

$$u_k(x,t) = \left(A_k \cos \frac{\pi k}{l} at + B_k \sin \frac{\pi k}{l} at \right) \sin \frac{\pi k}{l} x, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

дербес шешімдерін аламыз. (4.2.12)-(4.2.14) есебі сызықтық болғандықтан, суперпозиция қағидасы бойынша жалпы шешімі:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{\pi k}{l} at + B_k \sin \frac{\pi k}{l} at \right) \sin \frac{\pi k}{l} x. \tag{4.2.24}$$

Мұндағы A_k, B_k еркін тұрақтыларын анықтау үшін есептегі (4.2.14) бастапқы шарттарды қолданамыз, яғни (4.2.24) өрнекке $t = 0$ мәнін қойсақ

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{\pi k}{l} x$$

болады, ал екінші жағынан (4.2.14) бойынша $u(x,0) = \varphi(x)$. Демек, соңғы екі теңдіктен:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{\pi k}{l} x = \varphi(x). \tag{4.2.25}$$

Енді (4.2.24) өрнектен t бойынша дербес туындысын

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{\pi ka}{l}A_k\sin\frac{\pi k}{l}at+\frac{\pi ka}{l}B_k\cos\frac{\pi k}{l}at\right)\sin\frac{\pi k}{l}x \qquad (4.2.26)$$

анықтап, $t=0$ мәнін қойсақ,

$$u_t(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi ka}{l}B_k\sin\frac{\pi k}{l}x$$

теңдігіне келеміз. Ал (4.2.14) екінші шарты бойынша $u_t(x,0)=\psi(x)$. Демек,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi ka}{l}B_k\sin\frac{\pi k}{l}x=\psi(x). \qquad (4.2.27)$$

Екінші жағынан бұл алынған (4.2.25), (4.2.27) теңдіктер – сәйкес $\varphi(x)$, $\psi(x)$ функцияларының синус бойынша Фурье қатарына жіктелулері. Олай болса, математикалық анализ курсынан белгілі[7] Фурье қатарына жіктеу теориясы бойынша, A_k, B_k Фурье коэффициенттерін сәйкес

$$A_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx,\quad B_k=\frac{2}{\pi ka}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx \qquad (4.2.28)$$

формулаларымен анықтаймыз.

Олай болса, (4.2.12)-(4.2.14) бастапқы-шеттік есептің шешімі әзірше формалды түрде (4.2.24) қатарымен өрнектеледі және ондағы A_k, B_k коэффициенттері (4.2.28) интегралдарымен есептелінеді. Енді осы формалдық қай кезде қисынды болатындығын тексерейік.

3-қадам. (4.2.24) **шешімді тексеру.**

1. Алдымен, формалды түрде құрылған (4.2.24) функционалдық қатарды бірқалыпты жинақтылыққа зерттейік. Ол келесі түрдегі сандық қатарға мажорантталады

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(|A_k|+\frac{|B_k|}{k}\right). \qquad (4.2.29)$$

Бұл қатардың жинақты болуы үшін

$$\varphi(x)\in C^1[0,l],\quad \varphi(0)=\varphi(l)=0,\qquad \psi(x)\in C[0,l] \qquad (4.2.30)$$

[7]Мәселен, $f(x)$ функциясының $\{\varphi_k(x)\}$ толық жүйесі бойынша Фурье қатарына жіктелуі $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k\varphi_k(x)$ болса, онда Фурье коэффициенттері:
$a_k=\frac{1}{\|\varphi_k\|^2}\int\limits_0^l f(x)\varphi_k(x)\,dx,\ k=1,2,...$

орындалуы жеткілікті.

2. Бастапқы шарт орынды болуы үшін (4.2.25) қатардың бірқалыпты жинақтылығы қажет. Ол үшін оны мажоранттайтын

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k\,|A_k|+|B_k|)$$

сандық қатары жинақты болуы жеткілікті. Ал бұл қатар жинақталуы үшін

$$\varphi(x)\in C^2[0,l],\quad \varphi(0)=\varphi(l)=0,\quad \psi(x)\in C^1[0,l],\quad \psi(0)=\psi(l)=0 \quad (4.2.31)$$

шартының орындалуы жеткілікті.

3. Енді (4.2.24) қатарының әрбір мүшесі x және t бойынша екі рет дифференциалданғаны керек. Ол үшін

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^2\,|A_k|+k\,|B_k|\right)$$

қатардың жинақталуы жеткілікті. Бұл қатардың жинақталуы үшін

$$\begin{gathered}\varphi(x)\in C^3[0,l],\quad \varphi(0)=\varphi(l)=0,\quad \varphi''(0)=\varphi''(l)=0,\\ \psi(x)\in C^2[0,l],\quad \psi(0)=\psi(l)=0\end{gathered} \quad (4.2.32)$$

орындалуы жеткілікті. Бұл (4.2.32) шарт жоғарыдағы (4.2.30)-(4.2.31) шарттарды жалпылайды.

Қорытынды. Жоғарыдағы формалды түрде құрылған (4.2.24) қатар (4.2.12)-(4.2.14) есебінің шешімі болуы үшін φ және ψ функциялары (4.2.32) шартын қанағаттандыруы қажетті.

Ескерту 4.2.1. *Егер жоғарыдағы* (4.2.13) *Дирихле шарттарының орнында Нейман шарты немесе үшінші шекаралық шарттар берілсе, онда меншікті мәндер мен меншікті функциялары өзгешелікте болады. Ал қалған қадамдар дәл осындай жолмен жүріледі.*

Мәселен, шекаралық шарттар

$$\begin{aligned}&u(0,t)=0,\ \ u_x(l,t)=0,\\ &u_x(0,t)=0,\ \ u(l,t)=0,\\ &u_x(0,t)=0,\ \ u_x(l,t)=0\end{aligned}$$

түрдегі шарттардың бірімен берілсе, онда оларға сәйкес меншікті мәндер мен меншікті функциялар:

$$\begin{aligned}&\lambda_k=\frac{(2k+1)\,\pi}{2l},\ \ X_k=\sin\frac{(2k+1)}{2l}\pi x,\ \ k=0,1,\dots,\\ &\lambda_k=\frac{(2k+1)\,\pi}{2l},\ \ X_k=\cos\frac{(2k+1)}{2l}\pi x,\ \ k=0,1,\dots,\\ &\lambda_k=\frac{\pi k}{l},\quad X_k=\cos\frac{\pi k}{l}x,\ \ k=0,1,\dots.\end{aligned}$$

Мысал 4.2.1. *Біртекті толқындық теңдеуі үшін бастапқы–шеттік есебін шешіңіз.*

$$u_{tt} = 4u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \ \ t > 0$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \ \ t > 0,$$

$$u(x,0) = 0, \ \ u_t(x,0) = x - x^2, \ \ 0 \le x \le 1.$$

Шешуі. Мұнда шекаралық шарттар Дирихле шартымен берілгендіктен, сәйкес меншікті сандар мен меншікті функциялар

$$\lambda_k = \left.\frac{\pi k}{l}\right|_{l=1} = \pi k, \quad X_k\left(x\right) = \sin \pi k x, \quad k = 1, 2, 3, ...$$

болады. Сондай ақ $l = 1$, $a = 2$, $\varphi\left(x\right) = 0$, $\psi\left(x\right) = x(1-x)$ болғандықтан (4.2.28) формуладан $A_k = 0$, ал B_k коэффициенті келесі түрде есептелінеді:

$$B_k = \frac{1}{\pi k}\int\limits_0^1 (x - x^2)\sin k\pi x dx = \left| \begin{array}{c} u = (x-x^2), \ du = (1-2x)\,dx, \\ dv = \sin k\pi x dx, \ v = -\dfrac{\cos k\pi x}{k\pi} \end{array} \right| =$$

$$\frac{1}{\pi k}\left(-\left.\frac{\cos k\pi x}{k\pi}(x - x^2)\right|_0^1 + \frac{1}{k\pi}\int\limits_0^1 (1-2x)\cos k\pi x dx \right) =$$

$$\left| \begin{array}{c} u = 1-2x, \ du = -2dx, \\ dv = \cos k\pi x dx, \ v = \dfrac{\sin k\pi x}{k\pi} \end{array} \right| =$$

$$(1-2x)\left.\frac{\sin k\pi x}{(k\pi)^3}\right|_0^1 + \frac{2}{k^3\pi^3}\int\limits_0^1 \sin k\pi x dx =$$

$$-\left.\frac{2\cos k\pi x}{(k\pi)^4}\right|_0^1 = -\frac{2}{k^4\pi^4}\left((-1)^k - 1\right) = \begin{cases} 0, \quad k = 2n, \\ \dfrac{4}{(2n+1)^4\pi^4}, \quad k = 2n+1. \end{cases}$$

Олай болса, (4.2.24) бойынша шешім:

$$u\left(x,t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)^4\,\pi^4}\sin 2\pi\left(2n+1\right)t \cdot \sin\pi\left(2n+1\right)x.$$

Мысал 4.2.2. *Біртекті толқындық теңдеуі үшін бастапқы-шеттік есебін шешіңіз:*

$$u_{tt}=81u_{xx},\quad 0<x<\frac{5}{2},\ \ t>0,$$

$$u\,(0,t)=0,\ \ u'_x\left(\frac{5}{2},t\right)=0,\quad t>0,$$

$$u(x,0)=\pi\sin 3\pi x,\ \ u_t(x,0)=9\pi\sin\pi x,\quad 0\le x\le\frac{5}{2}.$$

Шешуі. Мұндай шекаралық шарттарға сәйкес меншікті сандар мен меншікті функциялар

$$\lambda_k=\left.\frac{(2k+1)\,\pi}{2l}\right|_{l=\frac{5}{2}}=\frac{(2k+1)\,\pi}{5},\quad X_k=\sin\frac{(2k+1)\,\pi}{5}x,\quad k=0,1,\ldots.$$

Ал (4.2.24) бойынша шешімді

$$u\,(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{9(2k+1)\pi}{5}t+B_k\sin\frac{9(2k+1)\pi}{5}t\right)\sin\frac{(2k+1)\pi}{5}x$$

түрде іздейміз. Мұндағы A_k, ал B_k коэффициенттерін табу үшін бастапқы шарттарды қолданамыз. $u(x,0)=\pi\sin 3\pi x$ шарты бойынша

$$u\,(x,0)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k\sin\frac{(2k+1)\pi}{5}x=\pi\sin 3\pi x.$$

Бұдан меншікті функциялардың ортогоналдық қасиетін ескеріп, Фурье коэффициенттері ретінде A_k коэффициенттерін есептейміз:

$$A_k=\frac{4}{5}\int_0^{\frac{5}{2}}\pi\sin 3\pi x\cdot\sin\frac{(2k+1)\pi}{5}xdx=\begin{cases}\pi, & k=7,\\ 0, & k\neq 7.\end{cases}$$

Ал $u_t(x,0)=9\pi\sin\pi x$ екінші бастапқы шарты бойынша

$$u_t\,(x,0)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{9(2k+1)\pi}{5}B_k\sin\frac{(2k+1)\pi}{5}x=9\sin\pi x.$$

Бұдан

$$\frac{(2k+1)\pi}{5}B_k=\frac{4}{5}\int_0^{\frac{5}{2}}\pi\sin\pi x\cdot\sin\frac{(2k+1)\pi}{5}xdx=\begin{cases}\pi, & k=2,\\ 0, & k\neq 2\end{cases}$$

немесе $B_k=\begin{cases}1, & k=2,\\ 0, & k\neq 2.\end{cases}$
Демек, шешім

$$u\,(x,t)=\sin 9\pi t\sin\pi x+\pi\cos 27\pi t\sin 3\pi x.$$

4.2.2. Біртекті емес толқындық теңдеуі үшін біртекті шекаралық шартты бастапқы-шеттік есептер

Біртекті шекаралық шарттармен берілген, біртекті емес толқындық теңдеу үшін қойылған бастапқы-шеттік есебін қарастыралық:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f\left(x,t\right), \; 0 < x < l, \; t > 0, \tag{4.2.33}$$

$$u\left(0,t\right) = u\left(l,t\right) = 0, \;\; t > 0, \tag{4.2.34}$$

$$u\left(x,0\right) = \varphi\left(x\right), \;\; u_t\left(x,0\right) = \psi\left(x\right), \;\; 0 \le x \le l. \tag{4.2.35}$$

Бұл есептің шешімін (4.2.34) шекаралық шартына сәйкес Штурм-Лиувилль есебінің меншікті функциясы (біздің жағдайда олар $X_k = \sin\frac{\pi k}{l}x$, 100 - беттегі 1-кестені қараңыз) бойынша Фурье қатары түрінде іздейміз:

$$u\left(x,t\right) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k\left(t\right)\sin\frac{\pi k}{l}x, \tag{4.2.36}$$

мұндағы $T_k\left(t\right)$ – белгісіз функциялар. Оларды анықтау үшін алдымен есептегі белгілі $f\left(x,t\right)$, $\varphi\left(x\right)$, $\psi(x)$ функцияларын меншікті функциялар бойынша Фурье қатарына жіктейміз, яғни

$$f\left(x,t\right) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k\left(t\right)\sin\frac{\pi k}{l}x, \quad f_k\left(t\right) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f\left(x,t\right)\sin\frac{\pi k}{l}x dx, \; k = 1,2,\ldots, \tag{4.2.37}$$

$$\varphi\left(x\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin\frac{\pi k}{l}x, \qquad \varphi_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi\left(x\right)\sin\frac{\pi k}{l}x dx, \; k = 1,2,\ldots, \tag{4.2.38}$$

$$\psi\left(x\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \sin\frac{\pi k}{l}x, \qquad \psi_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \psi\left(x\right)\sin\frac{\pi k}{l}x dx, \; k = 1,2,\ldots. \tag{4.2.39}$$

Енді (4.2.36) қатардың (әзірше формалды түрде) t және x айнымалылары бойынша екінші ретті дербес туындыларын тауып, (4.2.37) қатармен бірге (4.2.33) теңдеуге қойсақ:

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k''\left(t\right)\sin\frac{\pi k}{l}x + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 T_k\left(t\right)\sin\frac{\pi k}{l}x = f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k\left(t\right)\sin\frac{\pi k}{l}x.$$

Бұдан

$$T_k''(t) + \left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 T_k(t) = f_k(t), \ k = 1, 2, 3, ... \tag{4.2.40}$$

екінші ретті біртекті емес жай дифференциалдық теңдеулерін аламыз. Енді (4.2.36) қатарды (4.2.35) бастапқы шарттарға қойсақ, онда (4.2.38), (4.2.39) жіктелулері бойынша

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) \sin \frac{\pi k}{l} x = \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin \frac{\pi k}{l} x,$$

$$u_t(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k'(0) \sin \frac{\pi k}{l} x = \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin \frac{\pi k}{l} x$$

теңдіктерін аламыз. Ал бұл теңдіктерден (4.2.40) теңдеу үшін

$$T_k(0) = \varphi_k, \ T_k'(0) = \psi_k, \quad k = 1, 2, 3, ... \tag{4.2.41}$$

бастапқы шарттарын аламыз. Бұл (4.2.40), (4.2.41) Коши есебі жай дифференциалдық теңдеулер теориясынан белгілі бірмәнді шешіледі. Олай болса, $T_k(t)$ функцияларын анықтап, (4.2.36) қатарға қойсақ, ізделінді $u(x, t)$ шешімді бірмәнді анықтаймыз.

Мұнда байқағанымыз, Фурье әдісінің қолдану мағынасы (4.2.34) шекаралық шарттарға тікелей байланысты. Егер (4.2.34) шарттың орнында Нейман немесе аралас шекаралық шарттар болса, онда (4.2.36)-(4.2.39) өрнектер бұларға сәйкес меншікті функциялар бойынша өзгереді.

Кейде (4.2.33)-(4.2.35) есебін редукция әдісі арқылы біртекті бастапқы шарттармен қойылған біртекті емес теңдеу үшін аралас есеппен, теңдеуі біртекті, бірақ бастапқы шарттары біртекті емес есептерге жіктеп шешу кейбір есептеулерді ((4.2.40)-(4.2.41) есебін) жеңілдетеді.

Мысал 4.2.3. *Келесі біртекті емес толқындық теңдеуі үшін бастапқы-шеттік есепті шешіңіз:*

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{2x}{\pi}(1 - 3t) - 2, t \in (0, \infty), x \in (0, \pi),$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, t \in (0, \infty),$$

$$u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = \sin x, x \in [0, \pi].$$

Шешуі. Шекаралық шарттарға сәйкес меншікті функциялар $X_k = \sin kx$. Олай болса шешімді

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin kx \tag{4.2.42}$$

түрінде іздейміз. Алдымен,

$$f(x,t) = \frac{2x}{\pi}(1-3t) - 2, \ \varphi(x) = 0, \quad \psi(x) = \sin x$$

функцияларын Фурье қатарына жіктеп, (4.2.37)-(4.2.39) формулалары бойынша Фурье коэффициенттерін есептейміз:

$$f(x,t) = \frac{2x}{\pi}(1-3t) - 2 = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin kx,$$

$$f_k(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{2x}{\pi}(1-3t) - 2\right)\sin kx = \frac{4}{\pi k}\left[3(-1)^k t - 1\right], \ k = 1, 2, ...,$$

$$\psi(x) = \sin x = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \sin kx,$$

$$\psi_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \sin kx = \begin{cases} 1, \ k = 1, \\ 0, \quad k \neq 1, \end{cases} \qquad \varphi_k = 0.$$

Бұларды берілген есепке қойсақ, нәтижеде

$$T_k''(t) + k^2 T_k(t) = \frac{4}{\pi k}\left[3(-1)^k t - 1\right], \ T_k(0) = 0, \ T_k'(0) = 0, \ k = 2, 3, ..., \tag{4.2.43}$$

$$T_1''(t) + T_1(t) = -\frac{4}{\pi}[3t+1], \ T_1(0) = 0, \ T_1'(0) = 1 \tag{4.2.44}$$

Коши есептерін аламыз.
(4.2.43) есепті жеке қарастырайық. (4.2.43) теңдеудің жалпы шешімі

$$T_k(t) = T_k^0 + \tilde{T}_k(t)$$

болады, мұндағы T_k^0 оған сәйкес біртекті теңдеуінің жалпы шешімі

$$T_k^0(t) = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,$$

ал $\tilde{T}_k(t)$ – бір дербес шешімі. Оны $\tilde{T}_k(t) = at + b$ түрінде іздейміз және оны теңдеуге қойып, a, b белгісіз тұрақтыларын анықтап, дербес шешімін табамыз:

$$a = \frac{12(-1)^k}{\pi k^3}, \ b = \frac{4}{\pi k^3} \quad \Rightarrow \tilde{T}_k(t) = \frac{4}{\pi k^3}\left(3(-1)^k t - 1\right).$$

Демек, (4.2.43) теңдеудің жалпы шешімі

$$T_k(t) = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{4}{\pi k^3}\left(3(-1)^k t - 1\right).$$

Бұған, бастапқы шарттарды қолданып, (4.2.43) Коши есебінің шешімін аламыз:

$$T_k(t) = \frac{4}{\pi k^3}\left[\cos kt - \frac{3(-1)^k}{k}\sin kt + 3(-1)^k t - 1\right], \quad k = 2, 3, ... \qquad (4.2.45)$$

Дәл осылайша, (4.2.44) есептің шешімін тапсақ,

$$T_1(t) = \sin t + \frac{4}{\pi}\left[\cos t + 3\sin t - 3t - 1\right]. \qquad (4.2.46)$$

Бұл анықталған (4.2.45), (4.2.46) шешімдерді жоғарыдағы (4.2.42) қатарға қойып, k бойынша біріктіріп ықшамдасақ, ізделінді шешімді аламыз:

$$u(x,t) = \sin t \sin x + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\left[\cos kt - \frac{3(-1)^k}{k}\sin kt + 3(-1)^k t - 1\right]\sin kx.$$

4.2.3. Толқындық теңдеуі үшін жалпы түрде қойылған бастапқы – шеттік есептер

Біртекті емес шекаралық шарттармен берілген, біртекті емес толқындық теңдеуі үшін жалпы түрде қойылған келесі бастапқы-шеттік есепті қарастырайық:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + F(x,t), 0 < x < l,\ t > 0, \qquad (4.2.47)$$

$$u(0,t) = \mu(t),\ u(l,t) = \nu(t),\ t > 0, \qquad (4.2.48)$$

$$u(x,0) = \Phi(x),\ u_t(x,0) = \Psi(x),\ 0 \le x \le l. \qquad (4.2.49)$$

Бұл есепті шешу әдісінің басты мақсаты (4.2.48) шекаралық шарттарды біртекті түрге келтіру арқылы жоғарыдағы (4.2.33)-(4.2.35) тәрізді есебін алу. Ол үшін шешімді

$$u(x,t) = v(x,t) + \omega(x,t) \qquad (4.2.50)$$

түрде іздейміз. Мұндағы $\omega(x,t)$ функциясы – (4.2.48) бертекті емес

$$\omega(0,t) = \mu(t),\ \omega(l,t) = \nu(t)$$

шекаралық шартты қанағаттандыратын еркін түрде таңдап алынған функция. Бұл (4.2.50) түрдегі шешімді берілген (4.2.47)-(4.2.48) есебіне қойсақ, нәтижеде белгісіз $v(x,t)$ функциясына қатысты біртекті шекаралық шартпен берілген

$$\begin{aligned} &v_{tt} = a^2 v_{xx} + f(x,t),\ 0 < x < l,\ t > 0, \\ &v(0,t) = v(l,t) = 0,\ \ t > 0, \\ &v(x,0) = \varphi(x),\ \ v_t(x,0) = \psi(x),\ \ 0 \le x \le l \end{aligned} \tag{4.2.51}$$

бастапқы-шеттік есебін аламыз. Мұндағы

$$f(x,t) = F(x,t) - [\omega_{tt} - a^2\omega_{xx}],\quad \varphi(x) = \Phi(x) - \omega(x,0),\quad \psi(x) = \Psi(x) - \omega_t(x,0).$$

Бұл (4.2.51) есеп алдыңғы пункте қарастырылған (4.2.33)-(4.2.35) есебі тәрізді. Олай болса, жоғарыда көрсетілген әдістер бойынша оның шешімін тауып, $\omega(x,t)$ функциясын қоссақ, (4.2.47)-(4.2.49) есебінің шешімін аламыз.

Ескерту 4.2.2. *Жоғарыдағы* (4.2.48) *шарттар үшін* $\omega(x,t)$ *функциясын*

$$\omega(x,t) = \mu(t) + \frac{x}{l}(\nu(t) - \mu(t))$$

түрде алуға болады.

Егер (4.2.48) *шарттың орнында Нейман немесе басқа да шекаралалық шарттар болса, онда басқа да жолмен* $\omega(x,t)$ *функциясын қалауымызша таңдап аламыз.*

Мысал 4.2.4. *Келесі біртекті емес шарттармен берілген толқындық теңдеуі үшін бастапқы-шеттік есепті шешіңіз:*

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ \ 0 < x < \pi,\ \ t > 0, \tag{4.2.52}$$

$$u(0,t) = t^2,\ u(l,t) = t^3,\ t > 0, \tag{4.2.53}$$

$$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = \sin x,\ 0 \le x \le \pi. \tag{4.2.54}$$

Шешуі. Шешімді $u(x,t) = v(x,t) + \omega(x,t)$ түрде іздейміз. Мұнда $\omega(x,t)$ функциясын

$$\omega(x,t) = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)t^2 + \frac{x}{\pi}t^3$$

түрде таңдап алуға болады (4.2.2-ескертуді қараңыз). Олай болса,

$$u(x,t) = v(x,t) + \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)t^2 + \frac{x}{\pi}t^3$$

берілген есепке қойып, $v\left(x,t\right)$ функциясы үшін

$$v_{tt}=v_{xx}+\frac{2x}{\pi}\left(1-3t\right)-2, t\in(0,\infty), x\in(0,\pi),$$

$$v(0,t)=v(\pi,t)=0, t\in(0,\infty),$$

$$v(x,0)=0, v_t\left(x,0\right)=\sin x, x\in[0,\pi]$$

есебін аламыз. Бұл есеп жоғарыдағы 4.2.3 - мысалда қарастырылған және оның шешімі:

$$v(x,t)=\sin t\sin x+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\left[\cos kt-\frac{3(-1)^k}{k}\sin kt+3(-1)^k t-1\right]\sin kx.$$

Олай болса, ізделінді шешім

$$u(x,t)=\left(1-\frac{x}{\pi}\right)t^2+\frac{x}{\pi}t^3+\sin t\sin x+$$

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\left[\cos kt-\frac{3(-1)^k}{k}\sin kt+3(-1)^k t-1\right]\sin kx.$$

4.2.4. Стационарлы біртекті емес толқындық теңдеуі үшін қойылған бастапқы-шеттік есептер

Егер (4.2.47)-(4.2.49) есептің берілгендері уақыттан тәуелсіз функциялар болса, мұндай есеп стационарлы біртекті емес есеп деп аталады және оны төмендегі түрде шешу жеңіл болады.

Есептің қойылымы: Берілгендері t уақыттан тәуелсіз келесі стационарлы біртекті емес есепті қарастырайық:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x), \; 0 < x < l, \; t > 0, \tag{4.2.55}$$

$$u(0,t) = u_1 = const, \;\; u(l,t) = u_2 = const, \;\; t > 0, \tag{4.2.56}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \;\; u_t(x,0) = \psi(x), \;\; 0 \le x \le l. \tag{4.2.57}$$

Шешуі. Есептің шешімін

$$u(x,t) = v(x,t) + q(x) \tag{4.2.58}$$

түрінде іздейміз. Мұның қажетті $u_{tt} = v_{tt}, \quad u_{xx} = v_{xx} + q''(x)$ туындыларын тауып, (4.2.55)-(4.2.57) есепке қойсақ,

$$\begin{array}{l} v_{tt} = a^2 v_{xx} + a^2 q'' + f(x), \;\; 0 < x < l, \; t > 0, \\ v(0,t) = u_1 - q(0), \;\; v(l,t) = u_2 - q(l), \;\; t > 0, \\ v(x,0) = \varphi(x) - q(x), \;\; v_t(x,0) = \psi(x), \;\; 0 \le x \le l \end{array} \tag{4.2.59}$$

есебін аламыз. Бұл есеп сызықты болғандықтан, оны келесі екі есепке ажыратуға болады, яғни $q(x)$ функциясы

$$a^2 q'' + f(x) = 0, \;\; q(0) = u_1, \;\; q(l) = u_2 \tag{4.2.60}$$

жай дифференциалдық теңдеуі үшін шеттік есептің, ал $v(x,t)$ функциясы

$$\begin{array}{l} v_{tt} = a^2 v_{xx}, \;\; 0 < x < l, \; t > 0, \\ v(0,t) = v(l,t) = 0, \;\; t > 0, \\ v(x,0) = \varphi(x) - q(x), \;\; v_t(x,0) = \psi(x) - q(x), \;\; 0 \le x \le l \end{array} \tag{4.2.61}$$

бастапқы-шеттік есептің шешімі. Алдымен, (4.2.60) есептің $q(x)$ шешімін анықтап, оны (4.2.61) есептегі бастапқы шарттарға қойып, 4.2.1. - бөлімдегідей $v(x,t)$ шешімін табамыз. Бұл екі есептің шешімін қосып, ізделінді есептің шешімін аламыз.

Мысал 4.2.5. *Келесі стацинорлы біртекті емес толқындық теңдеуі үшін бастапқы-шеттік есепті шешіңіз:*

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 9\sin\dfrac{3x}{2}, \quad 0 < x < \pi,\, t > 0, \\ u\left(0,t\right) = 1,\ u_x\left(\pi,t\right) = 1, \quad t > 0, \\ u\left(x,0\right) = x + 1,\ u_t\left(x,0\right) = 0,\ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Шешуі. Жоғарыды айтылғандайын, шешімді $u\left(x,t\right) = v\left(x,t\right) + q\left(x\right)$ түрінде іздейміз, мұнда

$$q\left(x\right): \quad q'' - 9\sin\frac{3x}{2} = 0,\ q\left(0\right) = 1,\ q'\left(\pi\right) = 1$$

есептің шешімі және оны төмендегіше анықтаймыз:

$$q'' = 9\sin\frac{3x}{2} \quad \Rightarrow \quad q' = -6\cos\frac{3x}{2} + c_1 \quad \Rightarrow$$

$$q\left(x\right) = -4\sin\frac{3x}{2} + c_1 x + c_2 \quad \Rightarrow \quad q\left(0\right) = c_2 = 1,\ q'\left(\pi\right) = c_1 = 1$$

$$q\left(x\right) = -4\sin\frac{3x}{2} + x + 1.$$

Ал $v\left(x,t\right)$ функциясы

$$\begin{array}{l} v_t = v_{xx},\ 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ v\left(0,t\right) = v_x\left(\pi,t\right) = 0,\ \ t > 0, \\ v\left(x,0\right) = x + 1 - q(x) = 4\sin\dfrac{3x}{2},\ \ v_t(x,0) = 0 \end{array}$$

есептің шешімі. Алдыңғы бөлімдегідей оның шешімін тапсақ,

$$v\left(x,t\right) = 4\cos\frac{3t}{2}\sin\frac{3x}{2}.$$

Демек, берілген есептің шешімі:

$$u\left(x,t\right) = 4\left(\cos\frac{3t}{2} - 1\right)\sin\frac{3x}{2} + x + 1.$$

4.2.5. Жаттығулар

Жоғарыдағы әдістерді қолданып, келесі тербеліс теңдеуі үшін бастапқы–шеттік есептерді шешіңіздер:

4.2.1. $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx},\ \ 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u\left(0,t\right) = u\left(l,t\right) = 0,\ \ t > 0, \\ u\left(x,0\right) = 0,\ \ u_t\left(x,0\right) = \sin\frac{2\pi x}{l},\ \ 0 \le x \le l. \end{cases}$

4.2.2. $\begin{cases} u_{tt} = 16u_{xx}, \quad 0 < x < 8,\ t > 0, \\ u\left(0,t\right) = 0,\ \ u\left(8,t\right) = 0,\ \ t > 0, \\ u(x,0) = 31\sin\pi x,\ \ u_t(x,0) = 4\pi\sin\pi x,\ \ 0 \le x \le 8. \end{cases}$

4.2.3. $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \ \ 0 < x < l, \ \ \ t > 0, \\ u\,(0,t) = u_x\,(l,t) = 0, \ \ t > 0, \\ u\,(x,0) = \sin\dfrac{5\pi x}{2l}, \ \ u_t\,(x,0) = \sin\dfrac{\pi x}{2l}, \ \ 0 \le x \le l. \end{cases}$

4.2.4. $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \ \ 0 < x < l, \ \ t > 0, \\ u_x\,(0,t) = u_x\,(l,t) = 0, \ \ \ t > 0, \\ u\,(x,0) = x, \ \ u_t\,(x,0) = 1, \ \ 0 \le x \le l. \end{cases}$

4.2.5. $\begin{cases} u_{tt} = 36 u_{xx}, \ \ 0 < x < 4, \ \ t > 0, \\ u\,(0,t) = 4t, \ \ u\,(4,t) = 8t, \ \ \ t > 0, \\ u\,(x,0) = 0, \ \ u_t\,(x,0) = 24\pi \sin 4\pi x + 4 + x, \ \ 0 \le x \le 4. \end{cases}$

4.2.6. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \ \ 0 < x < \pi, \ \ t > 0, \\ u\,(0,t) = t, \ \ u_x\,(\pi,t) = 1, \ \ \ t > 0, \\ u\,(x,0) = \sin\frac{x}{2}, \ \ u_t\,(x,0) = 1, \ \ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

4.2.7. $\begin{cases} u_{tt} = 2u_{xx} - u, \ \ 0 < x < \pi, \ \ t > 0, \\ u_x\,(0,t) = u_x\,(\pi,t) = 0, \ \ \ t > 0, \\ u\,(x,0) = 0, \ \ u_t\,(x,0) = 4\sin^4 x, \ \ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

4.2.8. $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + Ae^{-t}\sin\frac{\pi x}{l}, \ \ 0 < x < l, \ \ t > 0, \\ u\,(0,t) = u\,(l,t) = 0, \ \ \ t > 0, \\ u\,(x,0) = \ u_t\,(x,0) = 0, \ \ 0 \le x \le l. \end{cases}$

4.2.9. $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin 2t, \ \ 0 < x < l, \ \ t > 0, \\ u_x\,(0,t) = 0, \ \ u_x\,(l,t) = \dfrac{2}{a}\sin\frac{2l}{a}\sin 2t, \ \ \ t > 0, \\ u\,(x,0) = 0, \ \ u_t\,(x,0) = -2\cos\frac{2x}{a}, \ \ 0 \le x \le l. \end{cases}$

4.2.10. $\begin{cases} u_{tt} = \Delta u(x,y,t), \ \ 0 < x < \pi, \ \ 0 < y < \pi, \ \ t > 0, \\ u\,(0,y,t) = u\,(\pi,y,t) = u\,(x,0,t) = u\,(x,\pi,t) = 0, \ \ \ t > 0, \\ u\,(x,y,0) = 3\sin x \sin 2y, \ \ u_t\,(x,y,0) = 5\sin 3x \sin 4y, \ \ 0 \le x,y \le \pi. \end{cases}$

4.2.11. $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \ \ 0 < x < l, \ \ t > 0, \\ u_x\,(0,t) = 0, \ \ u_x\,(l,t) + hu\,(l,t) = 0, \ \ h > 0, \ \ t > 0, \\ u\,(x,0) = 0, \ \ u_t\,(x,0) = 1, \ \ 0 \le x \le l. \end{cases}$

4.2.12. $\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx}, \ \ 0 < x < 2, \ \ t > 0, \\ u\,(0,t) = -8, \ \ u\,(2,t) = 2, \ \ t > 0, \\ u\,(x,0) = \sin 6\pi x - 8 + 5x, \ \ u_t\,(x,0) = 0, \ \ 0 \le x \le 2. \end{cases}$

4.2.13. *Ұштары мықтап бекітілген, ұзындығы l - ге тең ішектің көлденең тербелісінің есебін шешіңіз, егер ол бастапқы мезетте тыныштық жағдайда болса ($u(x,0) = 0$) және бастапқы жылдамдығы*

$$u_t(x,0) = \begin{cases} v_0, & \textit{егер } x \in [\alpha,\ \beta] \\ 0, & \textit{егер } x \overline{\in} [\alpha,\ \beta] \end{cases}$$

формуламен берілсе, мұндағы $0 \le \alpha < \beta \le l$, $v_0 = const$.

4.2.14. *Шекарасында мықтап бекітілген* $(0 \le x \le p,\ \ 0 \le y \le p)$ *квадрат мембрананың еркін тербелісінің есебін шешіңіз, егер бастапқы жағдайы мен бастапқы жылдамдығы* $u(x,y,0) = A\sin\frac{\pi x}{p}\sin\frac{\pi y}{p},\ \ u_t(x,y,0) = 0$ *белгілі болса.*

4.2.15. $\begin{cases} u_{tt} - 2u_t = u_{xx} + 4t\left(\sin x - x\right), \ \ 0 < x < \frac{\pi}{2}, \ \ t > 0, \\ u\left(0,t\right) = 3, \ \ u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = t^2 + t, \ \ t > 0, \\ u\left(x,0\right) = 3, \ \ u_t\left(x,0\right) = x + \sin x, \ \ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

4.2.6. Жауаптары

4.2.1. $u\left(x,t\right) = \frac{l}{2a\pi}\sin\frac{2\pi x}{l}\sin\frac{2a\pi t}{l}.$

4.2.2. $u(x,t) = 31\cos 4\pi t\sin\pi x + \sin 4\pi t\sin\pi x.$

4.2.3. $u\left(x,t\right) = \frac{2l}{a\pi}\sin\frac{\pi x}{2l}\sin\frac{a\pi t}{2l} + \sin\frac{5\pi x}{2l}\cos\frac{5a\pi t}{2l}.$

4.2.4. $u\left(x,t\right) = t + \dfrac{l}{2} - \dfrac{4l}{\pi^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{\left(2k+1\right)^2}\cos\dfrac{a\left(2k+1\right)\pi t}{l}\cos\dfrac{\left(2k+1\right)\pi x}{l}.$

4.2.5. $u\left(x,t\right) = 4t + xt + \sin 24\pi t\sin 4\pi x.$

4.2.6. $u\left(x,t\right) = x + t + \cos\dfrac{t}{2}\sin\dfrac{x}{2} - \dfrac{8}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^k}{\left(2k+1\right)^2}\cos\dfrac{\left(2k+1\right)t}{2}\sin\dfrac{\left(2k+1\right)x}{2}.$

4.2.7. $u\left(x,t\right) = \frac{3}{2}\sin t - \frac{2}{3}\sin 3t\cos 2x + \frac{1}{2\sqrt{33}}\sin\sqrt{33}t\cos 4x.$

4.2.8. $u\left(x,t\right) = \frac{A}{1+\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2}\left(e^{-t} - \cos\frac{a\pi t}{l} + \frac{l}{a\pi}\sin\frac{a\pi t}{l}\right)\sin\frac{\pi x}{l}.$

4.2.9. $u\left(x,t\right) = \dfrac{t}{2} - \left(\dfrac{1}{4} + \cos\dfrac{2x}{a}\right)\sin 2t.$

4.2.10. $u\left(x,t\right) = 3\cos\sqrt{5}t\sin x\sin 2y + \sin 5t\sin 3x\sin 4y.$

4.2.11. $u\left(x,t\right) = \dfrac{2h}{a}\sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{h^2+\lambda_k}}{\lambda_k\left(l\left(h^2+\lambda_k\right)+h\right)}\sin a\sqrt{\lambda_k}t\cos\sqrt{\lambda_k}x,$ *мұндағы* λ_k *сандары* $\sqrt{\lambda}tg\sqrt{\lambda}l = h$ *теңдеуінің оң түбірлері.*

4.2.12. $u\left(x,t\right) = 5x - 8 + \cos 18\pi t\sin 6\pi x.$

4.2.13. $u(x,t) = \dfrac{2lv_0}{\pi^2 a}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos\frac{k\pi\alpha}{l} - \cos\frac{k\pi\beta}{l}}{k^2}\sin\dfrac{k\pi x}{l}\sin\dfrac{k\pi at}{l}.$

4.2.14. $u(x,y,t) = A\cos\dfrac{a\pi\sqrt{2}}{p}t\sin\dfrac{\pi x}{p}\sin\dfrac{\pi y}{p}.$

4.2.15. $u\left(x,t\right) = 3 + x\left(t+t^2\right) + \left(5te^t - 8e^t + 4t + 8\right)\sin x.$

4.3 Жылуөткізгіштік теңдеуіне қойылған бастапқы-шеттік есептер

Бұл бөлімде Фурье әдісін қолданып жылуөткізгіштік теңдеуі үшін әр түрлі қойылымдағы бастапқы-шеттік есептерді шешу қарастырылады.

4.3.1. Біртекті жылуөткізгіштік теңдеуі үшін Фурье әдісі

Бір өлшемді (1D) жылуөткізгіштік теңдеуі үшін біртекті бірінші шекаралық (Дирихле) шартымен берілген

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l,\, t > 0, \tag{4.3.62}$$

$$u\left(0,t\right) = u\left(l,t\right) = 0, \quad t > 0, \tag{4.3.63}$$

$$u\left(x,0\right) = \varphi\left(x\right), \quad 0 \le x \le l \tag{4.3.64}$$

бастапқы-шеттік есептің $u\left(x,t\right) \in C^{2,1}_{x,t}\left(Q_t\right) \cap C(\overline{Q_t})$ шешімін табуды қарастырайық.

Бұл есепті шешу үшін Фурьенің айнымалылар бойынша жіктеу әдісін қолданамыз, яғни $u\left(x,t\right) \neq 0$ нөлдік емес шешімді

$$u\left(x,t\right) = T\left(t\right) X\left(x\right) \neq 0 \tag{4.3.65}$$

түрінде іздейміз. Бұдан

$$u_t = T^{'}\left(t\right) X\left(x\right), \; u_x = T\left(t\right) X^{'}\left(x\right), \; u_{xx} = TX^{''}\left(x\right)$$

туындыларын тауып, (4.3.62) теңдеуге қойсақ,

$$T'\left(t\right) X\left(x\right) = a^2 T\left(t\right) X''\left(x\right) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{T'\left(t\right)}{a^2 T\left(t\right)} = \frac{X''(x)}{X\left(x\right)} = -\lambda^2$$

немесе

$$T'\left(t\right) + \left(a\lambda\right)^2 T = 0 \tag{4.3.66}$$

және

$$X''\left(x\right) + \lambda^2 X\left(x\right) = 0 \tag{4.3.67}$$

екі жай дифференциалдық (ЖДТ) теңдеуге ажыратамыз. (4.3.65) шешімді (4.3.63) шекаралық шарттарға қойсақ:

$$u\left(0,t\right) = X\left(0\right) T\left(t\right) = 0, \quad u\left(l,t\right) = X\left(l\right) T\left(t\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$X(0) = 0,\ X(l) = 0 \tag{4.3.68}$$

шарттарын аламыз. Бұл (4.3.67)-(4.3.68) – Штурм-Лиувиль есебі. Оның меншікті мәндері мен меншікті функциялары:

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{l},\ X_k(x) = \sin\frac{\pi k}{l}x,\ k = 1, 2, 3, \dots. \tag{4.3.69}$$

Ал (4.3.66) бірінші ретті ЖДТ теңдеудің жалпы шешімі

$$T_k(t) = Ce^{-a^2\lambda^2 t}$$

немесе $\lambda_k = \dfrac{\pi k}{l}$ болғандықтан,

$$T_k(t) = C_k e^{-a^2\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 t}, \qquad k = 1, 2, 3, \dots. \tag{4.3.70}$$

Мұндағы C_k – белгісіз еркін тұрақты сандар. Демек, дербес шешімдері

$$u_k(x,t) = C_k e^{-a^2\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi k}{l}x,$$

ал суперпозиция қағидасы бойынша есептің жалпы шешімі:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-a^2\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi k}{l}x. \tag{4.3.71}$$

Мұндағы C_k тұрақтыларын (4.3.64) бастапқы шартты қолданып анықтаймыз

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\frac{\pi k}{l}x = \varphi(x).$$

Соңғы өрнек, екінші жағынан $\varphi(x)$ функциясының $\left\{\sin\dfrac{\pi k}{l}x\right\}$ бойынша Фурье қатарына жіктелуін береді. Олай болса, C_k Фурье коэффиценттері:

$$C_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi k}{l}x dx,\ k = 1, 2, 3, \dots. \tag{4.3.72}$$

Бұл C_k мәндерін анықтап, (4.3.71) өрнекке қойсақ, (4.3.62)-(4.3.64) аралас есебінің шешімін аламыз.

Теорема 4.3.1. *Егер $\varphi(x) \in C[0,l]$ және $\bar{Q}$ облысында бөлікті үзіліссіз $\varphi'(x)$ туындысы бар сонымен қатар $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ болса, онда* (4.3.71) *қатар $\overline{Q} = \{t \geq 0,\ 0 \leq x \leq l\}$ облысында бірқалыпты және абсолютті жинақталады және* (4.3.62)-(4.3.64) *есепті қанағаттандырады.*

Максимум мән қағидасы туралы теорема.

Теорема 4.3.2. *$\overline{Q}_T = \{0 \le t \le T,\ 0 \le x \le l\}$ тұйық облысында анықталған және үзіліссіз $u(x,t)$ функциясы $Q_T = \{0 < t \le T,\ 0 < x < l\}$ облысында*

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t)$$

жылуөткізгіштік теңдеуін қанағаттандырса, онда $u(x,t)$ функция өзінің максимум және минимум мәндеріне облыстың $t = 0$ бастапқы мезетінде немесе $x = 0$ немесе $x = l$ шекаралық нүктелерінде ғана жетеді.[8].

Ескерту 4.3.1. *Жоғарыдағы* (4.3.63) *Дирихле шарттарының орнында Нейман шарты немесе үшінші шекаралық шарттар берілсе, онда да есеп дәл осындай жолмен шығарылады, тек меншікті мәндер мен меншікті функциялары өзгешелікте болады.*

Мысал 4.3.1. *Келесі есепті шешіңіз:*

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0,\ 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u\left(0,t\right) = u\left(l,t\right) = 0,\ \ t > 0, \\ u\left(x,0\right) = 10\sin \pi x,\ \ 0 \le x \le 1. \end{cases} \tag{4.3.73}$$

Шешуі. Мұнда $a = 1, l = 1, \varphi\left(x\right) = 10\sin \pi x$ болғандықтан, (4.3.72) бойынша

$$C_k = 2\int\limits_0^1 10\sin \pi x \sin \pi k x dx = \begin{cases} 10, & k = 1 \\ 0, & k = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Демек,

$$u\left(x,t\right) = 10e^{-\pi t}\sin \pi x.$$

Мысал 4.3.2. *Төмендегі Нейман шартымен берілген бастапқы-шеттік есепті қарастырайық:*

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l, t > 0, \\ u_x\left(0,t\right) = u_x\left(l,t\right) = 0,\ t > 0, \\ u\left(x,0\right) = \varphi\left(x\right),\ \ 0 \le x \le l. \end{cases} \tag{4.3.74}$$

Бұл жағдайда

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{l},\ X_k\left(x\right) = \cos\frac{\pi k}{l}x,\ k = 0, 1, 2, \ldots,\ \ \|X_0\| = l,\ \|X_k\| = \frac{l}{2},\ k = 1, 2, ...$$

[8] Бұл екі теореманың дәлелдеулерін [11-12] әдебиеттерден карауды ұсынамын

болғандықтан (100-беттегі 1-кестені қараңыз) Нейман есебінің шешімі:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t} \cos\frac{\pi k}{l}x \tag{4.3.75}$$

болады, мұндағы

$$C_0 = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(x)xdx,\; C_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cos\frac{\pi k}{l}xdx,\;\; k = 1,2,3,\ldots.$$

Мысал 4.3.3. *Төмендегі бастапқы-шеттік есепті шешіңіз:*

$$u_t = 2u_{xx},\;\; 0 < x < 6,\; t > 0,$$

$$u_x(0,t) = u_x(6,t) = 0,\;\; t > 0,$$

$$u(x,0) = 31\cos 3\pi x + \cos 4\pi x,\;\; 0 \le x \le 6.$$

Шешуі. Бұл есепке сәйкес меншікті мәндер мен меншікті функциялар:

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{6},\;\; \lambda_k(x) = \cos\frac{\pi k}{6}x,\; k = 0,1,2,\ldots$$

және

$$u(x,t) = \sum_{k=0} C_k e^{-2\left(\frac{\pi k}{6}\right)^2 t} \cos\frac{\pi k}{6}x,\;\; k = 0,1,2,\ldots.$$

Бастапқы шарты бойынша

$$u(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cos\frac{\pi k}{6}x = 31\cos 3\pi x + \cos 4\pi x.$$

Бұдан

$$C_0 = \frac{1}{6}\int_0^6 (31\cos 3\pi x + \cos 4\pi x)dx = 0,$$

$$C_k = \frac{2}{6}\int_0^6 (31\cos 3\pi x + \cos 4\pi x)\cos\frac{\pi k}{6}xdx = \begin{cases} 31,\;\; k = 18 \\ 1,\;\; k = 24 \\ 0,\;\; k \ne 18, 24,\; k \in \mathbf{N} \end{cases}$$

Демек шешім:

$$u(x,t) = 18e^{-18\pi^2 t}\cos 3\pi x + e^{-32\pi^2 t}\cos 4\pi x.$$

Мысал 4.3.4. *Бастапқы-шеттік есепті шешіңіз:*

$$u_t = a^2 u_{xx},\ \ 0 < x < 1,\ t > 0,$$

$$u_x(0,t) = u(1,t) = 0,\ \ \ t > 0,$$

$$u(x,0) = x - 1,\ \ 0 \le x \le 1$$

бастапқы-шеттік есебінің $u(x,t) \in C^{2,1}_{x,t}\left(\overline{Q} = \{t \ge 0,\ 0 \le x \le 1\}\right)$ шешімін табыңыз.

$u_x(0,t) = u(1,t) = 0$ шекаралық шарттарға сәйкес келетін Штурм-Лиувилль есебінің меншікті мәндері мен меншікті функциялары 100-беттегі 1-кестені қараңыз):

$$\lambda_k = \frac{(2k+1)\pi}{2},\ \ X_k(x) = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2}x,\ k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Демек, шешімді

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{-\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)^2 t} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2}x$$

қатары түрінде іздейміз, мұндағы C_k Фурье коэффиценттері:

$$C_k = 2\int_0^1 (x-1)\cos\frac{(2k+1)\pi}{2}x dx =$$

$$2(x-1)\cdot\frac{2}{(2k+1)\pi}\sin\frac{(2k+1)\pi}{2}x\Big|_0^1 - \frac{4}{(2k+1)\pi}\int_0^1 \sin\frac{(2k+1)\pi}{2}x dx =$$

$$\frac{8}{(2k+1)^2\pi^2}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2}x\Big|_0^1 = -\frac{8}{(2k+1)^2\pi^2},\ \ \ k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Олай болса, шешім:

$$u(x,t) = -\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{4}t}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2}x.$$

4.3.2. Біртекті шекаралық шартпен берілген біртекті емес жылуөткізгіштік теңдеуі үшін бастапқы-шеттік есеп

$Q_t = \{(x,t)\,|\,0 < x < l,\, t > 0\}$ облысында

$$u_t = a^2 u_{xx} + f\,(x,t) \tag{4.3.76}$$

біртекті емес жылуөткізгіштік теңдеуін

$$u|_{t=0} = \varphi\,(x)\,,\ \ 0 \le x \le l \tag{4.3.77}$$

бастапқы және

$$u\,(0,t) = 0,\ \ u\,(l,t) = 0, \quad t > 0 \tag{4.3.78}$$

біртекті шекаралық шарттарын қанағаттандыратын $u\,(x,t) \in C^{2,1}_{x,t}\,(Q_t)$ шешімін табу есебін қарастырайық.

(4.3.76)-(4.3.78) есебінің шешімін, оның біртекті жағдайына сәйкес келетін Штурм-Лиувилль есебінің меншікті функциялары бойынша Фурье қатары түрінде іздейміз. (4.3.78) шекаралық шарттар үшін меншікті функциялар жүйесі $\left\{\sin\dfrac{\pi k}{l}x\right\}$ болғандықтан (100-беттегі 1-кестені қараңыз), шешім

$$u\,(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k\,(t)\sin\frac{\pi k}{l}x \tag{4.3.79}$$

түрде ізделінеді. Мұндағы $T_k\,(t)$ – белгісіз функциялар. Оларды анықтау үшін алдымен есептегі белгілі $f\,(x,t)$ және $\varphi\,(x)$ функцияларын меншікті функциялар бойынша Фурье қатарына жіктейміз, яғни

$$f\,(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k\,(t)\sin\frac{\pi k}{l}x,\ \ f_k\,(t) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f\,(x,t)\sin\frac{\pi k}{l}xdx,\ \ k = 1,2,\ldots, \tag{4.3.80}$$

$$\varphi\,(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin\frac{\pi k}{l}x, \qquad \varphi_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi\,(x)\sin\frac{\pi k}{l}xdx,\ \ k = 1,2,3,\ldots. \tag{4.3.81}$$

(4.3.79) қатардың t және x бойынша сәйкес қажетті дербес туындыларын тауып, (4.3.80) қатармен бірге (4.3.76) теңдеуге қойсақ

$$T'_k\,(t) + \left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 T_k\,(t) = f_k\,(t)\,,\ \ k = 1,2,3,\ldots \tag{4.3.82}$$

бірінші ретті біртекті емес жай дифференциалдық теңдеулерін аламыз.

Жоғарыдағы (4.3.77) бастапқы шартты және (4.3.81) жіктелуді ескеріп,

$$u\left(x,0\right)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k\left(0\right)\sin\frac{\pi k}{l}x=\varphi\left(x\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\sin\frac{\pi k}{l}x$$

(4.3.82) теңдеулері үшін

$$T_k\left(0\right)=\varphi_k,\ \ k=1,2,3,\ldots \tag{4.3.83}$$

бастапқы шарттарын аламыз. Бұл (4.3.82)-(4.3.83) Коши есебінің $T_k\left(t\right)$ шешімін бірмәнді анықтап, (4.3.79) қатарға қойсақ, ізделінді $u\left(x,t\right)$ шешімді аламыз.

Мысал 4.3.5. *Төмендегі біртекті емес бастапқы-шеттік есебін шешіңіз:*

$$\begin{array}{l} u_t=u_{xx}+\sin t\sin 4x,\ \ 0<x<\pi,\ \ t>0,\\ u\left(x,0\right)=0,\ \ 0\le x\le\pi,\\ u\left(0,t\right)=u\left(\pi,t\right)=0,\ \ t\ge 0. \end{array}$$

Шешуі. Шекаралық шарттарға сәйкес меншікті функциялар $X_k\left(x\right)=\sin kx$ болғандықтан шешімді

$$u\left(x,t\right)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k\left(t\right)\sin kx$$

түрде іздейміз.

Енді $f\left(x,t\right)=\sin t\sin 4x$ функциясын Фурье қатарына жіктейік:

$$\sin t\sin 4x=\sum_{k=1}^{\infty}f_k\left(t\right)\sin kx\ \ \Rightarrow$$

$$f_k\left(t\right)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin t\sin 4x\sin kxdx=\begin{cases}\sin t, & k=4,\\ 0, & k\ne 4.\end{cases}$$

Бұларды берілген есепке қойсақ, нәтижеде

$$T_k'\left(t\right)+k^2T_k\left(t\right)=0,\ T_k\left(0\right)=0,\ k\ne 4,\ k\in\mathbf{N},$$

$$T_4'\left(t\right)+16T_4\left(t\right)=\sin t,\ T_4\left(0\right)=0$$

Коши есептерін аламыз. Бұдан

$$T_k\left(t\right)=0,\ \ k\ne 4,\ k\in\mathbf{N},$$

$$T_4\left(t\right)=e^{-16t}\int\limits_0^{t}\sin\tau e^{16\tau}d\tau=\frac{1}{257}\left(e^{-16t}+16\sin t-\cos t\right).$$

Демек,

$$u\left(x,t\right)=\frac{1}{257}\left(e^{-16t}+16\sin t-\cos t\right)\sin 4x.$$

4.3.3. Біртекті жылуөткізгіштік теңдеуі үшін біртекті емес шекаралық шарттармен қойылған бастапқы-шеттік есеп

Айталық, $x = 0,\ x = l$ шекарасында

$$u(0,t) = \mu(t),\ \ u(l,t) = \nu(t) \tag{4.3.84}$$

біртекті емес шекаралық шарттарды және

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \ t > 0 \tag{4.3.85}$$

бастапқы шартты қанағаттандыратын

$$u_t = a^2 u_{xx},\ \ 0 \le x \le l,\ t > 0 \tag{4.3.86}$$

жылуөткізгіштік теңдеуінің шешімін табайық.

Егер шекаралық шарт біртекті болмаса, онда шешімге шекарада нөлге тең болатындай ауыстыру енгізу қажет. Көбінде шешімді

$$u(x,t) = v(x,t) + \omega(x,t) \tag{4.3.87}$$

түрде іздейміз. Мұндағы $\omega(x,t)$ функциясын (4.3.84) шекаралық шарт орындалатындай қалағанымызша таңдап аламыз. Мәселен,

$$\omega(x,t) = \mu(t) + \frac{x}{l}\left(\nu(t) - \mu(t)\right)$$

түрінде алуға болады. Бұдан кейін (4.3.87) шешімді (4.3.84)-(4.3.86) есепке қойсақ, белгісіз $v(x,t)$ функциясы үшін біртекті шекаралық шартты бірақ біртекті емес теңдеуі үшін келесі бастапқы-шеттік есебін аламыз:

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} + f(x,t),\ 0 \le x \le l,\ t > 0, \\ v(0,t) = v(l,t) = 0,\ t > 0, \\ v(x,0) = \bar{\varphi}(x),\ 0 \le x \le l. \end{cases} \tag{4.3.88}$$

Шындығында (4.3.87) бойынша

$$u(0,t) = v(0,t) + \mu(t) = \mu(t) \ \Rightarrow\ v(0,t) = 0,$$

$$u(l,t) = v(l,t) + \nu(t) = \nu(t) \ \Rightarrow\ v(l,t) = 0,$$

$$u(x,0) = v(x,0) + \mu(0) + \frac{x}{l}\left(\mu(0) - \nu(0)\right) = \varphi(x) \ \Rightarrow$$

$$v(x,0) = \varphi - \mu(0) + \frac{x}{l}\left(v(0) - \mu(0)\right) = \bar{\varphi},$$

$$v_t + \omega_t = a^2 v_{xx} \ \Rightarrow\ v_t = a^2 v_{xx} + f(x,t),$$

мұндағы $f(x,t) = -\mu' + \dfrac{x}{l}(\mu' - \nu')$.

Ал алынған (4.3.88) біртекті емес жылуөткізгіштік теңдеуі үшін біртекті шекаралық шарттармен қойылған бастапқы-шеттік есебі алдыңғы бөлімде көрсетілгендей жолмен шешіледі.

4.3.4. Жылуөткізгіштік теңдеуі үшін жалпы түрде қойылған бастапқы-шеттік есеп.

Жылуөткізгіштік теңдеуі үшін жалпы түрде қойылған біртекті емес бастапқы-шеттік есепті қарастырайық:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), 0 < x < l,\ t > 0, \tag{4.3.89}$$

$$u(0,t) = \mu(t),\ u(l,t) = \nu(t),\ t > 0, \tag{4.3.90}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \le x \le l. \tag{4.3.91}$$

Есептің шешімін $\omega(0,t) = \mu(t),\ \omega(l,t) = \nu(t)$ шекаралық шарттарын қанағаттандыратын алдын ала таңдап алынған белгілі $\omega(x,t)$ функциясы мен белгісіз $v(x,t)$ функциясының қосындысы түрінде іздейміз:

$$u(x,t) = v(x,t) + \omega(x,t). \tag{4.3.92}$$

Мұны бастапқы (4.3.89)-(4.3.91) есепке қойып, $v(x,t)$ функциясы үшін біртекті шекаралық шартпен берілген бастапқы-шеттік есебін аламыз:

$$\begin{array}{l} v_t = a^2 v_{xx} + h(x,t),\ \ 0 < x < l,\ t > 0, \\ v(0,t) = v(l,t) = 0,\ \ t > 0, \\ v(x,0) = g(x),\ \ 0 \le x \le l, \end{array}$$

мұндағы

$$h(x,t) = f(x,t) - [\omega_t - a^2\omega_{xx}],\quad g(x) = \varphi(x) - \omega(x,0).$$

Бұл аралас есеп – 4.3.2. - бөлімде қарастырылған есеп.

Мысал 4.3.6. *Төмендегі біртекті емес бастапқы-шеттік есепті шешіңіз:*

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} + x\left(3e^t + 1\right),\ \ 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(x,0) = 2 + 3\sin\dfrac{3x}{2},\ 0 \le x \le \pi, \\ u(0,t) = 2,\ u_x(\pi,t) = t,\ t > 0. \end{cases}$$

Шешуі. Шешімді

$$u(x,t) = v(x,t) + \omega(x,t) \tag{4.3.93}$$

түрінде іздейміз, мұнда $\omega(x,t)$ функциясын

$$\omega(0,t) = 2,\ \omega_x(\pi,t) = t \tag{4.3.94}$$

шарттарын қанағаттандыратындай таңдап аламыз. Мәселен,

$$\omega(x,t) = (ax+b)\,t + 2c$$

түрінде іздейік. Онда (4.3.94) бойынша

$$\begin{cases} \omega(0,t) = bt + 2c = 2 \\ \omega_x(\pi,t) = at = t. \end{cases}$$

Бұл $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$ десек орындалады және шешім

$$u(x,t) = v(x,t) + xt + 2 \tag{4.3.95}$$

түрде ізделінеді. Мұны берілген есепке қойсақ, $v(x,t)$ функциясына қатысты келесі есепті аламыз:

$$\begin{cases} v_t = 4v_{xx} + 3xe^t, \ \ 0 < x < \pi, \ t > 0, \\ v(0,t) = v_x(\pi,t) = 0, \ \ t > 0, \\ v(x,0) = 3\sin\dfrac{3x}{2}, \ \ 0 \le x \le \pi. \end{cases} \tag{4.3.96}$$

Бұл есепке сәйкес Штурм-Лиувилль есебін меншікті мәндері мен меншікті функциялары

$$\lambda_k = \frac{(2k+1)}{2}, \qquad X_k = \sin\frac{2k+1}{2}x, \ \ k = 0,1,2,\ldots.$$

Сондықтан $v(x,t)$ шешімді

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\sin\frac{2k+1}{2}x$$

түрде іздейміз, мұндағы $T_k(t)$ – белгісіз функция. Енді теңдеудің оң жағындағы $3xe^t$ және бастапқы шарттағы $3\sin\dfrac{3x}{2}$ функцияларын $\left\{\sin\dfrac{2k+1}{2}x\right\}$ бойынша Фурье қатарына жіктейік:

$$3xe^t = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)\sin\frac{2k+1}{2}x, \quad 3\sin\frac{3x}{2} = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\sin\frac{2k+1}{2}x \tag{4.3.97}$$

Бұдан

$$f_k(t) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} 3xe^t\sin\frac{2k+1}{2}x dx = (-1)^k\,\frac{24e^t}{\pi(2k+1)^2}, \ \ k = 0,1,2,..., \tag{4.3.98}$$

$$\alpha_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} 3\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{2k+1}{2}x dx = \begin{cases} 3, \ \ k = 1 \\ 0, \ \ k \ne 1. \end{cases} \tag{4.3.99}$$

Бұларды (4.3.96) қойсақ, $T_k\left(t\right)$ функциясы үшін

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[T_k'\left(t\right)+\left(2k+1\right)^2T_k\left(t\right)\right]\sin\frac{2k+1}{2}x=$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(-1\right)^k\frac{24e^t}{\pi\left(2k+1\right)^2}\sin\frac{2k+1}{2}x$$

немесе

$$T_k'\left(t\right)+\left(2k+1\right)^2=\left(-1\right)^k\frac{24e^t}{\pi\left(2k+1\right)^2},\ k=0,1,2,... \qquad (4.3.100)$$

жай дифференциалдық теңдеулерін аламыз. Бастапқы шарт бойынша

$$T_1\left(0\right)=3,\ T_k\left(0\right)=0,\ k=0,2,3,\ldots. \qquad (4.3.101)$$

Бұл (4.3.100), (4.3.101) бірінші ретті ЖДТ үшін Коши есебінің $k=1$ және $k=0,2,3,\ldots$ үшін сәйкес шешімдері:

$$T_1\left(t\right)=-\frac{24}{9\pi}\cdot\frac{1}{10}\left(e^t-e^{-9t}\right)+3e^{-9t},$$

$$T_k\left(t\right)=\frac{24\cdot\left(-1\right)^k}{\pi\left(2k+1\right)^2\left(\left(2k+1\right)^2+1\right)}\left(e^t-e^{-\left(2k+1\right)^2t}\right),\ k\neq 1.$$

Демек,

$$v\left(x,t\right)=3e^{-9t}\sin\frac{3x}{2}+\frac{24}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k\left(e^t-e^{-9t}\right)}{\left(2k+1\right)^2\left(\left(2k+1\right)^2+1\right)}\sin\frac{2k+1}{2}x,$$

ал бастапқы есептің шешімі

$$u\left(x,t\right)=v\left(x,t\right)+\omega\left(x,t\right)=$$

$$2+xt+3e^{-9t}\sin\frac{3x}{2}+\frac{24}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k\left(e^t-e^{-9t}\right)}{\left(2k+1\right)^2\left(\left(2k+1\right)^2+1\right)}\sin\frac{2k+1}{2}x.$$

4.3.5. Стационарлы біртекті емес жылуөткізгіштік теңдеуі үшін қойылған бастапқы-шеттік есеп

Шекарасында температурасы u_0 және u_l тұрақты және оң жағы t уақыттан тәуелсіз функция болатын шектелген l ұзындықтағы біліктің температурасын анықтау есебін қарастырайық.

Есептің қойылымы:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f\left(x\right), \ 0 < x < l, \ t > 0, \\ u\left(0,t\right) = u_0 = const, \ \ u\left(l,t\right) = u_l = const, \ t > 0, \\ u\left(x,0\right) = \varphi\left(x\right), \ \ 0 \le x \le l. \end{cases} \tag{4.3.102}$$

Бұл жағдайда (4.3.102) есептің шешімін

$$u\left(x,t\right) = v\left(x,t\right) + q\left(x\right) \tag{4.3.103}$$

түрінде іздейміз. Мұндағы $q(x)$ – стационар температура, ал $v(x,t)$ – стационар температурадан ауытқуы.

(4.3.103) өрнектен $u_t = v_t, \ u_{xx} = v_{xx} + q''\left(x\right)$ туындыларын тауып, (4.3.102) есепке қойсақ

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} + a^2 q'' + f\left(x\right), \ 0 < x < l, \ t > 0, \\ v\left(0,t\right) = u_0 - q\left(0\right), \ v\left(l,t\right) = u_l - q\left(l\right), \ t > 0, \\ v\left(x,0\right) = \varphi\left(x\right) - q\left(x\right), \ \ 0 \le x \le l \end{cases}$$

есепке келеміз.

Егер $q(x)$ функциясын

$$\begin{cases} a^2 q''\left(x\right) + f\left(x\right) = 0, \\ q\left(0\right) = u_0, \ q\left(l\right) = u_l \end{cases} \tag{4.3.104}$$

есептің шешімі түрінде таңдап алсақ, онда $v\left(x,t\right)$ функциясы

$$\begin{array}{l} v_t = a^2 v_{xx}, \ 0 < x < l, \, t > 0, \\ v\left(0,t\right) = v\left(l,t\right) = 0, \, t > 0, \\ v\left(x,0\right) = \varphi\left(x\right) - q\left(x\right), \ \ 0 \le x \le l \end{array} \tag{4.3.105}$$

бастапқы-шеттік есептің шешімі болар еді. Демек, (4.3.102) есептің шешімін (4.3.104) екінші ретті жай дифференциалдық теңдеу үшін шекаралық есебі мен (4.3.105) біртекті бастапқы-шеттік есептің шешімінің қосындысы түрінде аламыз.

Мысал 4.3.7. *Келесі бастапқы-шеттік есепті шешіңіз:*

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 6x + 2, \ 0 < x < 1, \, t > 0, \\ u_x\left(0,t\right) = 2, \ u\left(1,t\right) = 3, \ t > 0, \\ u\left(x,0\right) = x^3 - x^2 - 3x, \ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Шешімді $u(x,t) = v(x,t) + q(x)$ түрінде іздейік. Мұнда $q(x)$

$$q'' - 6x + 2 = 0,\ q'(0) = 2,\ q(1) = 3$$

есептің шешімі. Бұдан

$$\begin{array}{l} q'' = 6x - 2, \\ q' = 3x^2 - 2x + c_1 \\ q(x) = x^3 - x^2 + c_1 x + c_2 \quad \Rightarrow \\ q'(0) = c_1 = 2, \quad q(1) = c_1 + c_2 = 3 \ \Rightarrow \ c_2 = 1. \qquad \Rightarrow \\ q(x) = x^3 - x^2 + 2x + 1. \end{array}$$

Ал $v(x,t)$ функциясы

$$\begin{array}{l} v_t = v_{xx},\ 0 < x < 1,\ t > 0, \\ v(0,t) = v(1,t) = 0,\ \ t > 0, \\ v(x,0) = x^3 - x^2 + 3x - \left(x^3 - x^2 + 2x +\right) = x - 1,\ 0 \le x \le 1 \end{array}$$

есептің шешімі. Ол 4.3.1. - бөлімдегі 4.3.4 - мысал бойынша,

$$v(x,t) = -\frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{4} t} \cos \frac{(2k+1)\pi}{2} x$$

болады. Олай болса, берілген бастапқы мысал есептің шешімі

$$u(x,t) = x^3 - x^2 + 2x + 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{4} t} \cos \frac{(2k+1)\pi}{2} x.$$

4.3.6. Жаттығулар

Жоғарыдағы әдістерді қолданып, келесі есептерді шешіңіздер:

4.3.1. *Ұзындығы $l = \pi$ болатын жұқа біртекті стержіннің бастапқы температурасы $u(x,0) = 2\cos x + 3\cos 2x$ тең. Егер біліктің ұштарында жылу ағыны нөлге тең болса, білік ішіндегі $u(x,t)$, $t > 0$ температураны анықтаңыз.*

4.3.2. *Ұзындығы $l = \pi$ болатын жұқа біртекті біліктің бастапқы температурасы $u(x,0) = 2\sin 3x + 5\sin 8x$ тең. Егер біліктің ұштарындағы температура мұз еритіндей болса, білік ішіндегі $u(x,t)$, $t > 0$ температурасын анықтаңыз.*

4.3.3. $\begin{cases} u_t = 9u_{xx},\ \ 0 < x < \pi,\ \ t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ \ t > 0, \\ u(x,0) = 1,\ \ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

4.3.4. $\begin{cases} u_t = u_{xx} - \beta u,\ \ 0 < x < \pi,\ \ t > 0, \\ u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0,\ \ t > 0, \\ u(x,0) = \sin \dfrac{x}{2},\ \ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

4.3.5. $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \;\; 0 < x < \pi, \;\; t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \;\; t > 0, \\ u(x,0) = cos^2 x, \;\; 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

4.3.6. $\begin{cases} u_t = u_{xx}, \;\; 0 < x < 1, \;\; t > 0, \\ u(0,t) = 2, \;\; u(1,t) = 3, \;\; t > 0, \\ u(x,0) = 1, \;\; 0 < x < 1. \end{cases}$

4.3.7. $\begin{cases} u_t = u_{xx}, \;\; 0 < x < \pi, \;\; t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \;\; t > 0, \\ u(x,0) = \begin{cases} x, \;\; 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 1, \;\; \frac{\pi}{2} < x \le \pi. \end{cases} \end{cases}$

4.3.8. $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + t \sin 2x, \;\; 0 < x < \pi, \;\; t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \;\; t > 0, \\ u(x,0) = 0, \;\; 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

4.3.9. $\begin{cases} u_t = u_{xx} + u + 2\sin 2x \sin x, \;\; 0 < x < \frac{\pi}{2}, \;\; t > 0, \\ u_x(0,t) = u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0, \;\; t > 0, \\ u(x,0) = 0, \;\; 0 \le x \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

4.3.10. $\begin{cases} u_t = u_{xx} - 2u_x + x + 2t, \;\; 0 < x < 1, \;\; t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = t, \;\; t > 0, \\ u(x,0) = e^x \sin \pi x, \;\; 0 \le x \le 1. \end{cases}$

4.3.11. $\begin{cases} u_t = 9u_{xx} - 54x, \;\; 0 < x < 4, \;\; t > 0, \\ u(0,t) = 1, \;\; u(4,t) = 61, \;\; t > 0, \\ u(x,0) = 2 - x + x^3, \;\; 0 \le x \le 4. \end{cases}$

4.3.12. *Өлшемі* $[0,\pi] \times [0,\pi]$ *болатын жұқа біртекті тіктөртбұрышты пластинканың бастапқы температурасы* $u(x,y,0) = 3 \sin x \sin 5y$ *және шеттеріндегі температура нөлге тең. Пластинкадағы температураның* $u(x,y,t)$, $t > 0$ *таралуын анықтаңыз.*

4.3.13. *Айталық,* $u(x,t) \in C^{2,1}_{x,t}(Q) \cap \left(\overline{Q}\right)$, $Q = (0,2) \times (0,\infty)$ *функциясы*

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \;\; 0 < x < 2, \;\; t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(2,t) = 3, \;\; t > 0, \\ u(x,0) = x^3 - 3x^2 + 3x, \;\; 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

аралас есептің шешімі болсын. $\lim\limits_{t \to +\infty} u(x,t)$ *шекті есептеңіз.*

4.3.14. *Айталық,* $u(x,t) \in C^{2,1}_{x,t}(Q) \cap \left(\overline{Q}\right)$, $Q = (-\pi,\pi) \times (0,\infty)$ *функциясы*

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \;\; -\pi < x < \pi, \;\; t > 0, \\ u(-\pi,t) = u(\pi,t) = 0, \;\; t > 0, \\ u(x,0) = \sin^2 x, \;\; -\pi \le x \le \pi \end{cases}$$

аралас есептің шешімі болсын. $\lim\limits_{t \to +\infty} \int\limits_0^{\pi} u(x,t)dx$ *шекті есептеңіз.*

4.3.15. $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \;\; 0 < x < l, \; t > 0, \\ u_x\left(0, t\right) - h \cdot u\left(0, t\right) = 0, \;\; u\left(l, t\right) = 0, \;\; t > 0, \\ u\left(x, 0\right) = u_0 = const, \;\; 0 \le x \le l. \end{cases}$

4.3.7. Жауаптары

4.3.1. $u\left(x, t\right) = 2e^{-a^2 t} \cos x + 3e^{-4a^2 t} \cos 2x.$

4.3.2. $u\left(x, t\right) = 2e^{-9a^2 t} \sin 3x + 5e^{-64a^2 t} \sin 8x.$

4.3.3. $u\left(x, t\right) = \dfrac{4}{\pi} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2k-1} e^{-9(2k-1)^2 t} \sin(2k-1)x.$

4.3.4. $u\left(x, t\right) = e^{-(\beta + \frac{1}{4})t} \sin \dfrac{x}{2}.$

4.3.5. $u\left(x, t\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} e^{-4a^2 t} \cos 2x.$

4.3.6. $u\left(x, t\right) = 2 + x + \dfrac{2}{\pi} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{2(-1)^k - 1}{k} e^{-(\pi k)^2 t} \sin \pi k x.$

4.3.7. $u\left(x, t\right) = \dfrac{\pi^2}{8} + \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2}{\pi} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{\pi - 2}{2k} \sin \dfrac{\pi k}{2} + \dfrac{1}{k^2} \left(\cos \dfrac{\pi k}{2} - 1 \right) \right) e^{-k^2 t} \cos kx.$

4.3.8. $u\left(x, t\right) = \dfrac{1}{4a^2} \left[t + \dfrac{1}{4a^2} \left(e^{-4a^2 t} - 1 \right) \right] \sin 2x.$

4.3.9. $u\left(x, t\right) = t \cos x + \dfrac{1}{8} \left(e^{-8t} - 1 \right) \cos 3x.$

4.3.10. $u\left(x, t\right) = xt + \sin \pi x e^{x - t - \pi^2 t}.$

4.3.11. $u\left(x, t\right) = 1 - x + x^3 + \dfrac{4}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-9\pi^2 (2n-1)^2 t/16}}{(2n-1)} \sin \dfrac{(2n-1)\pi x}{4}.$

4.3.12. $u\left(x, y, t\right) = 3e^{-26a^2 t} \sin x \sin 5y.$

4.3.13. $3x - 2.$

4.3.14. $0.$

4.3.15. $u(x, t) = 2u_0 \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{h - (-1)^k \sqrt{h^2 + \mu_k^2}}{\mu_k \left(l \left(h^2 + \mu_k^2 \right) + h \right)} e^{-(a\mu_k)^2 t} \left(\mu_k \cos(\mu_k x) + h \sin(\mu_k x) \right)$
мұндағы μ_k *сандары* $h \cdot tg(\mu l) = -\mu$ *теңдеуінің оң түбірлері.*

4.4 Тіктөртбұрышта қойылған Лаплас және Пуассон теңдеулері үшін шеттік есептер

4.4.1. Лаплас теңдеуі үшін шекаралық есеп

$T = \{(x, y), 0 < x < a,\ 0 < y < b\}$ тіктөртбұрышының ішінде

$$\Delta u(x, y) = 0 \tag{4.4.106}$$

Лаплас теңдеуін, ал шекарасында жалпы түрдегі

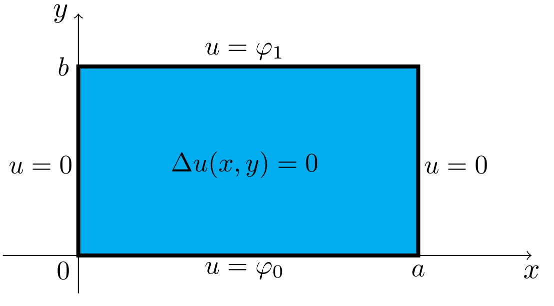
$$\begin{array}{l} (1-\alpha)\, u(x,0) + \alpha \cdot u_y(x,0) = \varphi_0(x),\ 0 \le x \le a, \\ (1-\beta)\, u(x,b) + \beta \cdot u_y(x,b) = \varphi_1(x),\ 0 \le x \le a, \\ (1-\gamma)\, u(0,y) + \gamma \cdot u_x(0,y) = \psi_0(y),\ 0 \le y \le b, \\ (1-\delta)\, u(a,y) + \delta \cdot u_x(a,y) = \psi_1(y),\ 0 \le y \le b \end{array} \tag{4.4.107}$$

шекаралық шарттарын қанағаттандыратын $u(x, y) \in C^{2,2}_{x,y}(T) \bigcap C^{1,1}_{x,y}(\overline{T})$ функциясын табу есебін қарастырайық.

Егер $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ болса, онда *Дирихле есебі*, ал $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$ болса, онда *Нейман есебі*, қалған жағдайлар үшін *аралас есеп* немесе *үшінші шеттік* есебі болады. Мұндай тіктөртбұрышты облыста берілген есептерді Фурьенің айнымалыларға жіктеу әдісі арқылы шешу оңай болады. Мәселен, ең қарапайым жағдайы

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, \ \ (x,y) \in T, \\ u(x,0) = \varphi_0(x),\ u(x,b) = \varphi_1(x),\ 0 \le x \le a, \\ u(0,y) = 0,\ u(a,y) = 0, \quad 0 \le y \le b \end{cases} \tag{4.4.108}$$

Дирихле есебін қарастырайық.



4.4.1-сурет.

Фурье әдісі бойынша шешімді

$$u(x, y) = X(x)\, Y(y) \ne 0 \tag{4.4.109}$$

түрінде іздейміз. Мұны теңдеуге қойып, айнымалыларын ажыратсақ:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda^2$$

теңдеуін немесе

$$Y''(y) - \lambda^2 Y(y) = 0, \tag{4.4.110}$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \tag{4.4.111}$$

жай дифференциалдық теңдеулерін аламыз. Енді (4.4.109) шешімді (4.4.108)-тегі соңғы шекаралық шартқа қойып (мұнда Штурм-Лиувилль есебін алу үшін x және y айнымалыларының рөлі бірдей болғандықтан, олардың ішіндегі біртекті шекаралық шарт қойылғанын таңдаймыз), (4.4.111) теңдеуі үшін

$$X(0) = 0,\ X(a) = 0 \tag{4.4.112}$$

шекаралық шарттарын аламыз. Бұл (4.4.111)-(4.4.112) Штурм-Лиувилль есебінің меншікті мәндері мен сәйкес меншікті функциялары (100-беттегі 1-кестені қараңыз):

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{a}, \quad X_k(x) = \sin\frac{\pi k}{a}x,\ \ k = 1, 2 \dots . \tag{4.4.113}$$

Ал мұндай λ_k меншікті мәндерге сәйкес (4.4.110) теңдеудің жалпы шешімі

$$Y_k(y) = A_k e^{\frac{\pi k}{a}y} + B_k e^{-\frac{\pi k}{a}y},\ k = 1, 2, 3 \dots .$$

Демек, (4.4.106) есебінің жалпы шешімі

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k e^{\frac{\pi k}{a}y} + B_k e^{-\frac{\pi k}{a}y}\right)\sin\frac{\pi k}{a}x \tag{4.4.114}$$

түрде болады. Мұндағы $A_k,\ B_k,\ k = 1, 2, 3 \dots$ белгісіз коэффициенттері (4.4.108) - гі бірінші шекаралық шарттардан анықталады, яғни

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k + B_k)\sin\frac{\pi k}{a}x = \varphi_0(x),$$
$$u(x, a) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k e^{\frac{\pi k}{a}b} + B_k e^{-\frac{\pi k}{a}b}\right)\sin\frac{\pi k}{a}x = \varphi_1(x)$$

Бұл теңдіктер екінші жағынан сәйкес φ_0, φ_1 функцияларының $\left\{\sin\frac{\pi k}{a}x\right\}$ жүйесі бойынша Фурье қатарына жіктелуін береді. Олай болса, Фурье коэффициенттері бойынша

$$\begin{cases} A_k + B_k = \varphi_0^k \\ A_k e^{\frac{\pi k}{a}b} + B_k e^{-\frac{\pi k}{a}b} = \varphi_1^k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \tag{4.4.115}$$

жүйесін аламыз, мұндағы

$$\varphi_0^k = \frac{2}{a}\int\limits_0^a \varphi_0\left(x\right)\sin\frac{\pi k}{a}xdx, \quad \varphi_1^k = \frac{2}{a}\int\limits_0^a \varphi_1\left(x\right)\sin\frac{\pi k}{a}xdx \qquad (4.4.116)$$

Фурье коэффициенттері. (4.4.115) жүйенің шешімдері

$$A_k = \frac{1}{2sh\frac{\pi k}{a}b}\left(\varphi_1^k - \varphi_0^k e^{-\frac{\pi k}{a}b}\right), \quad B_k = \frac{1}{2sh\frac{\pi k}{a}b}\left(\varphi_0^k e^{\frac{\pi k}{a}b} - \varphi_1^k\right), \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Бұл анықталған A_k, B_k коэффициенттерді (4.4.114) қатарға қойып, ықшамдасақ, нәтижеде

$$u\left(x,y\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\varphi_1^k sh\frac{\pi k}{a}y + \varphi_0^k sh\frac{\pi k}{a}\left(b-y\right)\right]\frac{\sin\dfrac{\pi k}{a}x}{sh\frac{\pi k}{a}b} \qquad (4.4.117)$$

ізделінді шешімді аламыз.

Мысал 4.4.1. *Лаплас теңдеуі үшін қойылған келесі Дирихле есебін шешіңіз:*

$$\begin{cases} \Delta u\left(x,y\right) = 0, \ \ 0 < x < \pi, \ \ \ 0 < y < 1, \\ u\left(x,0\right) = x\sin x, \ \ u\left(x,1\right) = 0, \ \ 0 \le x \le \pi \\ u\left(0,y\right) = 0, \ \ u\left(\pi,y\right) = 0, \quad \ 0 \le y \le 1, \qquad u\left(x,y\right) =? \end{cases}$$

Шешуі. Бұл мысал үшін $a = \pi$, $b = 1$, $\varphi_0\left(x\right) = x\sin x$, $\varphi_1\left(x\right) = 0$ болғандықтан, (4.4.116) формула бойынша Фурье коэффициенттері:

$$\varphi_1^k = 0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$
$$\varphi_0^k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi x\sin x \cdot \sin kxdx.$$

Соңғы интегралды $k = 1$ және қалған мәндерін жеке-жеке есептейік:

1. $k = 1$. $\varphi_0^1 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^\pi x\sin^2 xdx = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^\pi \dfrac{x}{2}\left(1-\cos 2x\right)dx = \dfrac{\pi}{2}.$

2. $k \neq 1$ болғанда:

$$\varphi_0^k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\sin x\sin kxdx = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\left[\cos\left(1-k\right)x - \cos\left(1+k\right)x\right]dx =$$

$$\frac{1}{\pi}\left[x\left(\frac{1}{1-k}\sin\left(1-k\right)x\ -\ \frac{1}{1+k}\sin\left(1+k\right)x\right)\right]\Big|_0^{\pi} -$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\left(-\frac{1}{\left(1-k\right)^2}\cos\left(1-k\right)x + \frac{1}{\left(1+k\right)^2}\cos\left(1+k\right)x\right)\right]\Big|_0^{\pi} =$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\left(1-k\right)^2}\left(\cos\left(1-k\right)\pi - 1\right) - \frac{1}{\left(1+k\right)^2}\left(\cos\left(1+k\right)\pi - 1\right)\right] =$$

$$\begin{cases} 0, \quad k = 2n-1, \\ -\dfrac{8k}{\pi\left(k^2-1\right)^2}, \quad k = 2n, \end{cases}$$

яғни

$$\varphi_0^{2k} = -\frac{16k}{\pi\left(4k^2-1\right)^2},\ \varphi_0^{2k+1} = 0,\ k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Демек, (4.4.116) формула бойынша шешім:

$$u\left(x, y\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_0^k sh\left(1-y\right)k\frac{\sin kx}{shk} =$$

$$\frac{\pi}{2}\frac{sh\left(1-y\right)}{sh1}\sin x - \frac{16}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\cdot sh2k\left(1-y\right)}{\left(4k^2-1\right)^2 sh2k}\sin 2kx.$$

Ескерту 4.4.1. *Егер Нейман немесе аралас есебі берілсе де дәл осындай жолмен талданады. Мұнда тек шекаралық шарттарға қатысты меншікті мәндер мен меншікті функциялар өзгешелікте болады.*

Мысал 4.4.2. *Лаплас теңдеуі үшін қойылған шекаралық есебін шешіңіз:*

$$\begin{cases} \Delta u\left(x, y\right) = 0,\ \ 0 < x < a,\ \ 0 < y < b, \\ u\left(x, 0\right) = 0,\ u_y\left(x, b\right) = x\ ,\ 0 \le x \le a, \\ u_x\left(0, y\right) = 0,\ u_x\left(a, y\right) = 0, \quad 0 \le y \le b. \end{cases}$$

Шешуі. Шешімді $u\left(x, y\right) = X\left(x\right)Y\left(y\right) \neq 0$ түрде іздесек, онда шекаралық шарттарға байланысты

$$Y''\left(y\right) - \lambda^2 Y\left(y\right) = 0,\ \ Y\left(0\right) = 0$$

теңдеуін және

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad X'(0) = 0,\ X'(a) = 0$$

Штурм-Лиувилль есебін аламыз. Бұдан 100 - беттегі 1 - кесте бойынша:

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{a},\ X_k(x) = \cos\frac{\pi k}{a}x,\ k = 0, 1, 2, 3\ldots,$$

$$\|X_0\|^2 = a,\quad \|X_k\|^2 = \frac{a}{2},\quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Сондай-ақ мұндай $\lambda_k = \dfrac{\pi k}{a}, k = 1, 2, 3, \ldots$ меншікті мәндерге сәйкес $Y(y)$ шешімі

$$Y_k(y) = a_k e^{\frac{\pi k}{a}y} + b_k e^{-\frac{\pi k}{a}y},\ k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Ал $\lambda_0 = 0$ мәніне сәйкес шешім

$$Y_0(y) = a_0 y + b_0$$

түрде болады. Бұларға $Y(0) = 0$ шартын қолдансақ,

$$a_k = -b_k,\ k = 1, 2, 3, \ldots,\quad b_0 = 0$$

немесе дербес шешімдері

$$Y_0(y) = a_0 \cdot y,\quad Y_k(y) = 2a_k \cdot sh\frac{\pi k}{a}y,\quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

болады. Демек есептің дербес шешімдері

$$u_0(x, y) = a_0 y,\quad u_k(x, y) = 2a_k sh\frac{\pi k}{a}y \cdot \cos\frac{\pi k}{a}x,\qquad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

ал суперпозиция қағидасы бойынша $u(x, y)$ шешім

$$u(x, y) = a_0 y + \sum_{k=1}^{\infty} 2a_k sh\frac{\pi k}{a}y \cdot \cos\frac{\pi k}{a}x.$$

Енді $u_y(x, b) = x$ шартын пайдаланып, a_k коэффициенттерін анықтаймыз:

$$u_y(x, b) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a_k \pi k}{a} ch\frac{\pi k}{a}b \cdot \cos\frac{\pi k}{a}x = x.$$

Бұдан $a_0 = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a x\,dx = \dfrac{a}{2}$,

$$a_k = \frac{a}{2\pi k \cdot ch\frac{\pi k}{a}b} \cdot \frac{2}{a}\int_0^a x \cos\frac{\pi k}{a}x\,dx = \begin{cases} 0, & k = 2n, \\ -\dfrac{2a^2}{(\pi k)^3\, ch\frac{\pi k}{a}b}, & k = 2n - 1 \end{cases}$$

немесе

$$a_{2k-1} = -\frac{2a^2}{\pi^3 (2k-1)^3 \, ch\dfrac{\pi (2k-1)}{a} b}, \quad a_{2k} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Олай болса есептің шешімі

$$u(x,y) = \frac{a}{2} y - \frac{4a^2}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{sh\dfrac{\pi (2k-1)}{a} y}{(2k-1)^3 \, ch\dfrac{\pi (2k-1)}{a} b} \cdot \cos \frac{\pi (2k-1)}{a} x.$$

4.4.2. Шекаралық шарты біртекті емес Дирихле есебі

Егер Дирихле есебі біртекті емес шекаралық шартпен берілсе, онда редукция әдісін қолданып, есеп біртекті шекаралық шартты екі есепке жіктеп шешіледі.

Мәселен,

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, \ \ (x,y) \in T, \\ u(x,0) = \varphi_0(x), \ u(x,b) = \varphi_1(x), \ 0 \le x \le a, \\ u(0,y) = \psi_0(y), \ u(a,y) = \psi_1(y), \quad 0 \le y \le b \end{cases} \tag{4.4.118}$$

есебі берілсін. Есеп сызықты болғандықтан, шешімді

$$u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y)$$

түрде іздейміз. Мұндағы $u_1(x,y)$ функциясы

$$\begin{cases} \Delta u_1(x,y) = 0, \ \ (x,y) \in T, \\ u_1(x,0) = \varphi_0(x), \ u_1(x,b) = \varphi_1(x), \ 0 \le x \le a, \\ u_1(0,y) = 0, \ u_1(a,y) = 0, \quad 0 \le y \le b \end{cases} \tag{4.4.119}$$

есебінің, ал $u_2(x,y)$ функциясы

$$\begin{cases} \Delta u_2(x,y) = 0, \ \ (x,y) \in T, \\ u_2(x,0) = 0, \ u_2(x,b) = 0, \ 0 \le x \le a, \\ u_2(0,y) = \psi_0(y), \ u_2(a,y) = \psi_1(y), \quad 0 \le y \le b \end{cases} \tag{4.4.120}$$

есебінің шешімі. Бұл екі есеп те жоғарыдағы (4.4.106) есебімен бірдей. (4.4.120) есепте y айнымалысы мен x айнымалысының орындары ауысып тұр. Сондықтан оларды жоғарыдағыдай шешіп, шешімдерін қоссақ болғаны.

Ескерту 4.4.2. (4.4.120) *есебінің* $u(x,y)$ *шешімі үзіліссіз болуы үшін*

$$\varphi_0(0) = \psi_0(0), \ \varphi_1(0) = \psi_0(b), \ \varphi_0(a) = \psi_1(0), \ \varphi_1(a) = \psi_1(b)$$

үйлесімділік шарттары орындалуы қажет.

4.4.3. Тіктөртбұрышта қойылған Пуассон теңдеуі үшін шеттік есеп

Пуассон теңдеуі – біртекті емес Лаплас теңдеуі болғандықтан, оны алдыңғы бөлімдерде зерттелген біртекті емес толқындық теңдеу, жылуөткізгіштік теңдеулері үшін шеттік есептердегідей әдіспен шешімін табамыз. Дәлірек айтқанда, шешімді y немесе x айнымалыларының біреуіне қатысты Штурм-Лиувилль есебінің меншікті функциялары арқылы қатар түрінде іздейміз.

Мысал 4.4.3. *Тіктөртбұрышта берілген біртекті шекаралық шартты Пуассон теңдеуі үшін келесі шеттік есепті шешіңіз:*

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = x^2 y, \;\; 0 < x < a, \;\; 0 < y < b, \\ u(x,0) = 0, \;\; u_y(x,b) = 0, \quad 0 \le x \le a, \\ u(0,y) = 0, \;\; u(a,y) = 0, \quad 0 \le y \le b. \end{cases}$$

Шешуі. Барлық шекаралық шарттар біртекті болғандықтан, біртекті теңдеу үшін Штурм-Лиувилль есебін немесе айнымалысының кез келгені үшін жазуға болады. Мәселен, y айнымалысы бойынша Штурм-Лиувилль есебі:

$$Y'' + \lambda^2 Y = 0, \;\; Y(0) = Y'(b) = 0.$$

Ал мұның меншікті мәндер мен меншікті функциялары:

$$\lambda_k = \frac{(2k+1)\pi}{2b}, \quad Y_k(y) = \sin\frac{(2k+1)\pi}{2b}y, \;\; k = 0,1,2,\ldots.$$

Олай болса, есептің шешімін

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) \cdot \sin\frac{(2k+1)\pi}{2b}y$$

түрде іздейміз. Әуелі, $f(x,y) = x^2 y$ функциясын $\{Y_k(y)\}$ жүйесі бойынша Фурье қатарына жіктейік:

$$x^2 y = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \cdot \sin\frac{(2k+1)\pi y}{2b},$$

мұндағы

$$f_k(x) = \frac{2}{b}x^2 \int_0^b y \sin\frac{(2k+1)\pi}{2b} y dy = \frac{(-1)^k 2}{b\lambda_k^2}x^2, \quad k = 0,1,2,\ldots.$$

Бұларды берілген есепке қойсақ, онда келесі екінші ретті ЖДТ үшін шекаралық есепке келеміз:

$$X_k''(x) - \lambda_k^2 X_k(x) = \frac{(-1)^k 2}{b\lambda_k^2} x^2 \quad X_k(0) = X_k(a) = 0, \quad k = 0, 1, 2...$$

ЖДТ теориясы бойынша

$$X_k''(x) - \lambda_k^2 X_k(x) = 0, \ \ k = 0, 1, 2...$$

біртекті теңдеуінің шешімі

$$X_k^0(x) = a_k e^{\lambda_k x} + b_k e^{-\lambda_k x},$$

ал $\bar{X}_k(x)$ дербес шешімі

$$\bar{X}_k(x) = Ax^2 + Bx + C$$

түрінде ізделінеді. Мұны теңдеуге қойып, A, B, C коэффициенттерін тапсақ, дербес шешім

$$\bar{X}_k(x) = (-1)^{k+1} \left(\frac{2}{b\lambda_k^4} x^2 + \frac{4}{b\lambda_k^6} \right) = \frac{(-1)^k 2}{b\lambda_k^6} \left(-2 - \lambda_k^2 x^2 \right)$$

болады. Демек жалпы шешімі

$$X_k(x) = a_k e^{\lambda_k x} + b_k e^{-\lambda_k x} + \frac{(-1)^k 2}{b\lambda_k^6} \left(2 + \lambda_k^2 x^2 \right).$$

Бұған $X_k(0) = X_k(a) = 0$ шарттарын қолданып, a_k, b_k белгісіздері үшін

$$\begin{cases} a_k + b_k + \frac{(-1)^{k+1} 4}{b\lambda_k^6} = 0 \\ a_k e^{\lambda_k a} + b_k e^{-\lambda_k a} + \frac{(-1)^{k+1} 4}{b\lambda_k^6} + \frac{(-1)^{k+1} 2a^2}{b\lambda_k^4} = 0, \ k = 0, 1, 2, ... \end{cases}$$

жүйесін аламыз. Ал бұл жүйенің шешімдері:

$$a_k = \frac{(-1)^k}{b\lambda_k^6 sh\lambda_k a} \left(\lambda_k^2 a^2 + 2\left(1 - e^{-\lambda_k a}\right)\right),$$

$$b_k = \frac{(-1)^k}{b\lambda_k^6 sh\lambda_k a} \left[2\left(e^{-\lambda_k a} - 1\right) - \lambda_k^2 a^2 \right], \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Олай болса, есептің шешімі

$$u(x, y) = \frac{2}{l} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\lambda_k^6 sh\lambda_k a} \left[\left(2 + a^2 \lambda_k^2\right) sh\lambda_k x - 2sh(x - a)\lambda_k - 2 - \lambda_k^2 x^2 \right] \sin \lambda_k y,$$

мұндағы $\lambda_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2b}$.

4.4.4. Жаттығулар

Жоғарыдағы әдістерді қолданып, келесі шеттік есептерді шешіңіз:

4.4.1. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ \ 0 < x < \pi, \ \ 0 < y < \pi, \\ u_x\left(0, y\right) = 0, \ \ u_x\left(\pi, y\right) = 0, \\ u\left(x, 0\right) = \pi, \ \ \ u\left(x, \pi\right) = x. \end{cases}$

4.4.2. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ \ 0 < x < \pi, \ \ 0 < y < l, \\ u\left(0, y\right) = 0, \ \ u_x\left(\pi, y\right) = 0, \ \ \ 0 \le y \le l, \\ u_y\left(x, 0\right) = A\sin\frac{x}{2}, \ \ \ u\left(x, l\right) = 0, \ \ 0 \le x \le \pi, \ \ A = const. \end{cases}$

4.4.3. $\begin{cases} \Delta u(x,y) = e^y \sin x, \ \ 0 < x < \pi, \ \ 0 < y < \pi, \\ u\left(0, y\right) = u\left(\pi, y\right) = 0, \ \ \ 0 \le y \le \pi, \\ u\left(x, 0\right) = u\left(x, \pi\right) = 0, \ \ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

4.4.4. $\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, \ \ 0 < x < a, \ \ 0 < y < b, \\ u\left(0, y\right) = u\left(a, y\right) = 0, \ \ \ 0 \le y \le b, \\ u\left(x, 0\right) = x\left(x^2 - 3ax + 2a^2\right), \ \ u\left(x, b\right) = 0, \ \ 0 \le x \le a, \ \ a, b = const. \end{cases}$

4.4.5. $\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, \ \ 0 < x < a, \ \ 0 < y < b, \\ u_x\left(0, y\right) = u_x\left(a, y\right) = 0, \ \ \ 0 \le y \le b, \\ u\left(x, 0\right) = 1, \ \ u\left(x, b\right) = 2, \ \ 0 \le x \le a, \ \ a, b = const. \end{cases}$

4.4.6. $\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, \ \ 0 < x < 3, \ \ 0 < y < 2, \\ u\left(x, 0\right) \ = 0, \ \ u_y\left(x, 2\right) \ = 0, \ \ 0 \le x \le 3, \\ u\left(0, y\right) = y\left(4 - y\right), \ \ \ u_x\left(3, y\right) = 0, \ \ 0 \le y \le 2 \end{cases}$

4.4.7. $\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, \ \ \ 0 < x < 1, \ \ 0 < y < 4, \\ u\left(x, 0\right) \ = 0, \ \ u\left(x, 4\right) \ = 0, \ \ 0 < x < 1, \\ u_x\left(0, y\right) = 0, \ \ \ u_x\left(1, y\right) = \begin{cases} y, \ \ 0 \le y \le 2, \\ 4 - y, \ \ 2 \le y \le 4, \end{cases} \ \ \ 0 < y < b. \end{cases}$

4.4.8. $\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, \ \ \ 0 < x < 2, \ \ 0 < y < \pi, \\ u_y\left(x, 0\right) \ = 0, \ \ u_y\left(x, \pi\right) \ = 0, \ \ 0 < x < 2, \\ u_x\left(0, y\right) = y, \ \ \ u\left(2, y\right) = 0, \ \ 0 < y < \pi. \end{cases}$

4.4.9. $\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, \ \ 0 < x < \infty, \ \ 0 < y < l, \\ u\left(0, y\right) = f\left(y\right), \ \ u\left(\infty, y\right) = 0, \\ u_y\left(x, 0\right) = 0, \ \ \ u_y\left(x, l\right) + hu\left(x, l\right) = 0, \ \ h > 0. \end{cases}$

4.4.10. $\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, \ \ 0 < x < \pi, \ \ 0 < y < \pi, \\ u\left(0, y\right) = 0, \ \ u\left(\pi, y\right) = Ay, \\ u\left(x, 0\right) = 0, \ \ \ u\left(x, \pi\right) = Ax. \end{cases}$

4.4.11. $\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, \ \ 0 < x < \pi, \ \ 0 < y < \pi, \\ u_x\left(0, y\right) = \sin y, \ \ u_x\left(\pi, y\right) = \sin 5y, \\ u\left(x, 0\right) = \cos x, \ \ \ u\left(x, \pi\right) = \cos 3x. \end{cases}$

4.4.12. $\begin{cases} \Delta u = 0,\ \ 0 < x < p,\ \ 0 < y < s, \\ u\,(0, y) = \ u_x\,(p, y) = 0,\ \ 0 \le y \le s, \\ u\,(x, 0) = 0,\ \ u\,(x, s) = f\,(x)\,,\ \ 0 \le x \le p,\ f(0) = f'(p) = 0. \end{cases}$

4.4.13. $\begin{cases} \Delta u = -2,\ \ 0 < x < a,\ \ -\frac{b}{2} < y < \frac{b}{2}, \\ u\,(0, y) = 0,\ \ u\,(a, y) = 0,\ \ -\frac{b}{2} \le y \le \frac{b}{2}, \\ u\left(x, -\frac{b}{2}\right) = 0,\ \ u\left(x, \frac{b}{2}\right) = 0,\ \ 0 \le x \le a. \end{cases}$

4.4.14. $\begin{cases} \Delta u = 0,\ \ [0, a] \times [0, \infty), \\ u\,(0, y) = 0,\ \ u\,(a, y) = 0,\ \ 0 \le y < \infty, \\ u\,(x, 0) = A\left(1 - \frac{x}{a}\right),\ \ \lim\limits_{y \to \infty} u\,(x, y) = 0,\ \ 0 \le x \le a. \end{cases}$

4.4.15. $\begin{cases} \Delta u = 0,\ \ 0 < x < \infty,\ \ 0 < y < l, \\ u\,(x, 0) = 0,\ \ u_y\,(x, l) = 0, \\ u\,(0, y) = f(y),\ \ \lim\limits_{y \to \infty} u\,(x, y) = 0. \end{cases}$

4.4.5. Жауаптары

4.4.1. $u\,(x, y) = \pi - \dfrac{1}{2}y - \dfrac{4}{\pi} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{\cos(2k+1)x \cdot sh(2k+1)y}{(2k+1)^2\, sh(2k+1)\pi}.$

4.4.2. $u\,(x, y) = 2A \dfrac{sh\frac{y-l}{2}}{ch\frac{l}{2}} \sin\frac{x}{2},$

Нұсқау: $sh\alpha \cdot ch\beta - sh\beta \cdot ch\alpha = sh(\alpha - \beta)$ формуласын қолданыңыз.

4.4.3. $u(x, y) = \dfrac{1}{2\sinh\pi}\left(ye^y \sinh\pi - \pi e^\pi \sinh y\right)\sin x.$

4.4.4. $u = \dfrac{12a^3}{\pi^3} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sinh n\pi\,(b-y)\,/a}{n^3 \sinh n\pi b/a} \sin\dfrac{n\pi x}{a}.$

4.4.5. $u = 1 + \dfrac{y}{b}.$

4.4.6. $u\,(x, y) = \frac{128}{\pi^3} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cosh\,(2n-1)\,\frac{\pi(x-3)}{4}}{(2n-1)^3 \cosh 3\,(2n-1)\,\frac{\pi}{4}} \sin\dfrac{(2n-1)\,\pi y}{4}.$

4.4.7. $u\,(x, y) = \dfrac{64}{\pi^3} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{\cosh\frac{(2n-1)\pi x}{4}}{(2n-1)^3 \sinh\frac{(2n-1)\pi}{4}} \sin\dfrac{(2n-1)\,\pi y}{4}.$

4.4.8. $u\,(x, y) = \dfrac{\pi\,(x-2)}{2} - \dfrac{4}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sinh\,(2n-1)\,(x-2)}{(2n-1)^3 \cosh 2\,(2n-1)} \cos\,(2n-1)\,y.$

4.4.9. $u\,(x, t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k e^{-\lambda_k x} \cos\lambda_k y,$ *мұндағы* λ_k *саньдары* $\lambda tg\lambda l = h$ *теңдеуінің оң түбірлері, ал* $f_k = \frac{(f, Y_k)}{(Y_k, Y_k)} = \frac{2\left(h^2 + \lambda_k^2\right)}{l\left(h^2 + \lambda_k^2\right) + h} \int\limits_0^l f\,(x) \cos\lambda_k y dy.$

4.4.10. $u(x,y) = 2A\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\cdot\left(\frac{\sin kx\cdot sh(ky)+\sin ky\cdot sh(kx)}{sh(k\pi)}\right) = \frac{Axy}{\pi}$.

4.4.11. $u(x,y) = \frac{sh(\pi-y)}{sh\pi}\cos x + \frac{sh3y}{sh3\pi}\cos 3x - \frac{ch(\pi-x)}{sh\pi}\sin y + \frac{ch5x}{5sh5\pi}\sin 5y$.

4.4.12. $u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{-\frac{(2k-1)\pi x}{2l}}\sin\frac{(2k-1)\,\pi y}{2l}$,

$$f_k = \frac{(f, Y_k)}{(Y_k, Y_k)} = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{(2k-1)\,\pi y}{2l}dy$$

4.4.13. $u(x,y) = x(a-x) - \frac{8a^2}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2k+1)\pi x}{a}ch\frac{(2k+1)\pi y}{b}}{(2k+1)^3\,ch\frac{(2k+1)\pi b}{2a}}$.

4.4.14. $u(x,y) = \frac{2A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}e^{-\frac{\pi k y}{a}}\sin\frac{\pi k x}{a}$.

4.4.15. $u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k}{sh\frac{(2k-1)\pi s}{2p}}sh\frac{(2k-1)\,\pi y}{2p}\sin\frac{(2k-1)\,\pi x}{2p}$,

$$f_k = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin\frac{(2k-1)\,\pi x}{2p}dx.$$

5 Бөлім

Эллипстік типті теңдеулер. Шеттік есептер

5.1 Негізгі эллипстік типті теңдеулер. Гармоникалық функциялар

5.1.1. Лаплас теңдеуі. Гармоникалық функциялардың негізгі қасиеттері

Эллипстік типті теңдеулердің ең қарапайымы әрі маңыздысының бірі:

$$\Delta u = 0 \tag{5.1.1}$$

Лаплас теңдеуі. Мұндағы Δ – Лаплас операторы деп аталады және ол Декарттық координат жүйесінде

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \tag{5.1.2}$$

түрде, $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ – полярлық координат жүйесінде

$$\Delta u = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \tag{5.1.3}$$

түрде, ал $x = r\cos\varphi\sin\theta,\ y = r\sin\varphi\sin\theta,\ \ z = r\cos\theta$ – сфералық координат жүйесінде

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \tag{5.1.4}$$

түрде анықталады.

Анықтама 5.1.1. *$C^m(\Omega)$ – функциялар класы (кеңістігі) деп, $\Omega \subset R^n$ облысында анықталған және өзінің m - ші ретке дейінгі дербес туындыларымен бірге үзіліссіз $u(x)$ функциялар класын түсінеміз. Егер m=0 болса, $C(\Omega)$ – Ω облысында үзіліссіз функциялар класын береді.*

Анықтама 5.1.2. *Шенелген Ω облысында екінші ретті дербес туындыларымен бірге үзіліссіз $\left(u(x) \in C^2(\Omega)\right)$ және Ω облысының әрбір нүктесінде* (5.1.1) *Лаплас теңдеуін қанағаттандыратын $u(x)$ функциясы* ***гармоникалық функция*** *деп аталады.*

Эллипстік типті теңдеулердің тағы да қарапайымы әрі маңыздылары

$$\Delta u = f(x) \tag{5.1.5}$$

Пуассон және

$$\Delta u + \lambda u = f(x)$$

Гельмгольц теңдеулері.

5.1.2. Лаплас теңдеуіне қойылатын негізгі шеттік есептер

Гармоникалық функциялар теориясында Дирихле, Нейман немесе үшінші шеттік есептердің қойылымы өте маңызды.

1. Дирихле есебі. Лаплас теңдеуі үшін *Дирихле есебі* немесе *бірінші шеттік есеп* деп $\overline{\Omega}$ облысында үзіліссіз $u(x) \in C^2(\Omega) \cup C\left(\overline{\Omega}\right)$ және

$$\begin{array}{l} u(x) = \varphi(x), \;\; x \in \partial\Omega \\ (\text{өзгеше белгіленуі: } u\,|_{\partial\Omega} = \varphi) \end{array} \tag{5.1.6}$$

шекаралық шартын қанағаттандыратын, Ω облысында гармоникалық $u(x)$ функциясын табу есебін айтамыз. Мұндағы $\varphi(x)$ функциясы $\partial\Omega$ шекарада берілген үзіліссіз функция, $\overline{\Omega} = \Omega \bigcup \partial\Omega$. Қысқаша жазсақ:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \;\; x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi, \;\; x \in \partial\Omega, \qquad u(x) \in C^2(\Omega) \cup C\left(\overline{\Omega}\right) -? \end{cases}$$

2. Нейман есебі. Лаплас теңдеуі үшін *Нейман есебі* немесе *екінші шеттік есеп* деп $u(x) \in C^2(\Omega) \cup C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ класында жататын және шекарада

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = \varphi \tag{5.1.7}$$

шартын қанағаттандыратын Ω облысында гармоникалық $u(x)$ функциясын табу есебін түсінеміз. Мұндағы $\vec{n}$ – $\partial\Omega$ бетіне тұрғызылған сыртқы нормал, $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ – n нормал бойынша алынған туынды. Ал $\varphi \in C(\partial\Omega)$ берілген функция.

Нейман есебі бірмәнді шешілуі үшін

$$\int\limits_{\partial\Omega} \varphi ds = 0 \tag{5.1.8}$$

шартының орындалуы қажетті және жеткілікті[1].

[1] Дәлелдеуін төмендегі 5.1.3 - теоремадан қараңыз

3. Үшінші шеттік есеп. Лаплас теңдеуі үшін *үшінші шеттік есеп* деп Ω облысында гармоникалық $\partial\Omega$ шекарада

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u\right|_{\partial\Omega} = \varphi \tag{5.1.9}$$

шартын қанағаттандыратын және $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ класында жататын $u\left(x\right)$ функциясын анықтау есебін айтамыз.

Егер жоғарыдағы қойылған есептердің шешімдері $\partial\Omega$ шекарасына қатысты Ω облысының ішінде немесе сыртында ізделінсе, онда сәйкес ішкі немесе сыртқы есеп деп аталады. Дәл осылайша, басқа да эллипстік теңдеулер үшін (5.1.6), (5.1.7) немесе (5.1.9) шекаралық шарттарымен берілген шеттік есептердің қойылымын келтіруге болады.

5.1.3. Лаплас теңдеуінің іргелі шешімдері

Лаплас теңдеуі көптеген түрлендірулерге қатысты инвариантты, сондықтан оның радиалдық, яғни $r = |x|$ тәуелді $u = u\left(r\right)$ шешімдерін іздейік:

$$r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}, \quad \frac{\partial r}{\partial x_k} = \frac{x_k}{r},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_k} = u_r' \cdot \frac{x_k}{r},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = \frac{\partial u}{\partial x_k}\left(u_r' \cdot \frac{x_k}{r}\right) = u_{rr}'' \cdot \frac{x_k^2}{r^2} + u_r' \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{x_k^2}{r^3}\right), \qquad k = 1, 2, ...n.$$

Лаплас операторы бойынша

$$\Delta u\left(r\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = u_{rr}'' + u_r' \cdot \left(\frac{n}{r} - \frac{1}{r}\right),$$

Демек,

$$\Delta u\left(r\right) = u_{rr}'' + \frac{n-1}{r} u_r' = \frac{1}{r^{n-1}}\left(r^{n-1} u_r\right)_r' = 0. \tag{5.1.10}$$

1. n=2 жағдайда

$$\Delta u = \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = 0. \tag{5.1.11}$$

Мұның екі жағын r - ге көбейтіп, екі рет интегралдасақ

$$r\frac{du}{dr} = C_1 \;\Rightarrow\; u\left(r\right) = C_1 \ln r + C_2 \tag{5.1.12}$$

шешімін аламыз.

2. $n \geq 3$ болсын. (5.1.10) өрнектің екі жағын r^{n-1} - ге көбейтіп, интегралдасақ:

$$r^{n-1}\frac{du}{dr} = C_1 \Rightarrow \frac{du}{dr} = \frac{C_1}{r^{n-1}}.$$

Бұны интегралдап,

$$u\left(r\right) = -\frac{C_1}{\left(n-2\right)r^{n-2}} + C_2 \tag{5.1.13}$$

шешімін аламыз.

(5.1.12) және (5.1.13) шешімдерде негізгі рөл бірінші қосылғыш болып тұр, себебі тұрақты сан әрқашан да Лаплас теңдеуінің шешімі болады әрі ешқандай мәлімет бермейді. Сондықтан да екі жағдайда да қолайлылық үшін $C_2 = 0$, ал $C_1 = -\dfrac{1}{\omega_n}$ деп алайық[2]. Мұндағы $\omega_n = \dfrac{2\left(\sqrt{\pi}\right)^n}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}$ – n өлшемді кеңістіктегі бірлік сфера ауданы, мәселен, $\omega_2 = 2\pi,\ \omega_3 = 4\pi, ...$

Анықтама 5.1.3. *Лаплас теңдеуінің іргелі шешімі деп*

$$E\left(x\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{|x|}, & n = 2, \\ \dfrac{1}{\omega_n\left(n-2\right)|x|^{n-2}}, & n \geq 3 \end{cases}$$

функциясын айтамыз.

Жалпы жағдайда, $\vec{r}$ радиус векторы ретінде жоғарыдағыдай $O(0, 0, ..., 0)$ координат басынан емес, кез келген $\xi \in \Omega$ нүктесінен x нүктесіне дейінгі $r = |\xi - x|$ арақашықтықты қарастырып, іргелі шешім анықтамасын беруге болады.

Анықтама 5.1.4. *Лаплас теңдеуінің іргелі шешімі деп*

$$E\left(x,\xi\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{|\xi - x|}, & n = 2, \\ \dfrac{1}{4\pi|\xi - x|}, & n = 3, \\ \dfrac{1}{\omega_n\left(n-2\right)|\xi - x|^{n-2}}, & n > 3 \end{cases} \tag{5.1.14}$$

функциясын айтамыз.

Бұл Лаплас теңдеуінің іргелі шешімінің физикалық мағынасы ξ нүктеде тығыздығы μ болатын электр заряды өз төңірегінде

$$U(x) = \mu \cdot E\left(x,\xi\right)$$

потенциалдық өріс туғызады.

[2] Кейбір оқулықтарда C_1 тұрақтысын оң таңбалы қылып та таңдайды.

Мысал 5.1.1. *Төмендегі шарттарды қанағаттандыратын* $0 < a < r < b$ *шар қабатында* $u = u(r)$ *гармоникалық функцияны анықтаңыз:*

$$\Delta u(r) = 0,\ u(a) = A,\ \ u(b) = B.$$

Шешуі. а) $n = 2$ жағдайда Лаплас теңдеуінің іргелі шешімі

$$u(r) = C_1 \ln r + C_2$$

болғандықтан, шекаралық шарттарды қолдансақ

$$\left.\begin{matrix} C_1 \ln a + C_2 = A \\ C_1 \ln b + C_2 = B \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$C_1 = \frac{A-B}{\ln\dfrac{a}{b}};\ \ C_2 = A - C_1 \ln a = A - \ \frac{A-B}{\ln\dfrac{a}{b}} \cdot \ln a$$

$$u(r) = \frac{A-B}{\ln\dfrac{a}{b}} \cdot \ln r + A - \frac{A-B}{\ln\dfrac{a}{b}} \cdot \ln a = A + \frac{A-B}{\ln\dfrac{a}{b}} \cdot \ln\frac{r}{a}$$

немесе

$$u(r) = \frac{A-B}{\ln\dfrac{a}{b}} \cdot [2\pi \cdot E(x,y) - \ln a] + A.$$

ә). $n = 3$ жағдайда іргелі шешім $u = \dfrac{C_1}{r} + C_2$ болғандықтан,

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{C_1}{a} + C_2 = A \\ \dfrac{C_1}{b} + C_2 = B \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$C_1 = \frac{(A-B)\,ab}{b-a};\ \ C_2 = A - \frac{C_1}{a} = A - \ \frac{(A-B)\,b}{b-a} = \frac{Bb - Aa}{b-a}$$

$$u(r) = \frac{1}{b-a}\left[\frac{(A-B)\,ab}{r} + Bb - Aa\right] =$$

$$\frac{1}{b-a}\left[(A-B)\,ab \cdot 4\pi \cdot E(x,y,z) + Bb - Aa\right].$$

5.1.4. Гармоникалық функциялардың негізгі қасиеттері. Грин формулалары

Гармоникалық функцияның қасиеттерін зерттеуде Гриннің бірінші және екінші формулалары жиі қолданылады.

1. Грин формулалары. Айталық, $\Omega \subset R^n$ – Евклид кеңістігіндегі тегіс $\partial\Omega \in C^1$ шекаралы шенелген облыс болсын.

Теорема 5.1.1. *Айталық, $u \in C^2(\Omega) \bigcap C^1(\overline{\Omega})$ және $v \in C^1(\Omega) \bigcap C(\overline{\Omega})$ болсын. Онда бұл u, v функциялары үшін Гриннің бірінші формуласы деп аталатын*

$$\int\limits_{\Omega} v \cdot \Delta u dx = \int\limits_{\partial\Omega} v \cdot \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds - \int\limits_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \tag{5.1.15}$$

теңдігі орынды, мұндағы $\vec{n}$ – сыртқы нормал вектор, $\nabla u = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial u}{\partial x_k}$.

Дәлелдеуі. Δ – операторы бойынша

$$\int\limits_{\Omega} v \cdot \Delta u dx = \int\limits_{\Omega} v \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} dx.$$

Бұдан $\int\limits_{\Omega} v \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} dx$ интегралын жеке алып бөліктеп интегралдасақ:

$$\int\limits_{\Omega} v \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} dx = \int\limits_{\partial\Omega} v \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k} \cdot n_k ds - \int\limits_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k} dx.$$

Мұны k бойынша 1-ден n-ге дейін қосындыласақ, нәтижеде

$$\int\limits_{\Omega} v \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} dx = \int\limits_{\partial\Omega} v \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k} n_k ds - \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx$$

жоғарыдағы (5.1.15) – Гриннің[3] бірінші формуласын аламыз, яғни

$$\int\limits_{\Omega} v \cdot \Delta u = \int\limits_{\partial\Omega} v \cdot \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int\limits_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u dx.$$

Теорема 5.1.2. *Айталық, $u(x), v(x) \in C^2(\Omega) \bigcap C^1(\overline{\Omega})$ болсын. Онда бұл u және v функциялары үшін*

$$\int\limits_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v) dx = \int\limits_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \right) ds \tag{5.1.16}$$

Гриннің екінші формуласы орынды.

[3] GEORGE GREEN (Джордж Грин) (1793-1841) – ағылшын математигі. Ол – математикалық физиканың көптеген бөлімдеріне елеулі үлесін қосқан ғалым.

Дәлелдеуі. Гриннің бірінші формуласы бойынша ((5.1.15) қараңыз)

$$\int\limits_{\Omega} u\Delta v = \int\limits_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - \int\limits_{\Omega} \nabla v \nabla u dx. \tag{5.1.17}$$

теңдігі орынды. Бұл (5.1.15) теңдіктен (5.1.17) мүшелеп алсақ бірден (5.1.16) аламыз.

2. Гармоникалық функциялардың негізгі қасиеттері. Гармоникалық функциялар келесі қасиеттерге ие:

1^0. *Гармоникалық функцияның нормал туындысы.*

Теорема 5.1.3. *Егер $u(x)$ функциясы тегіс шекаралы Ω облысында гармоникалық және $\overline{\Omega}$ тұйық облысында үзіліссіз дифференциалданса, онда*

$$\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0. \tag{5.1.18}$$

Дәлелдеуі. Егер (5.1.15) Гриннің бірінші формуласын $v = 1$ және $u = u(x)$ гармоникалық функциясы үшін жазсақ, $\nabla v = 0$, $\Delta u = 0$ болғандықтан, бірден (5.1.18) теңдікті аламыз. Бұл (5.1.18) теңдік жоғарыда ескертілген (5.1.7) Нейман есебінің шешілу шарты.

2^0. *Гармоникалық функцияның дифференциалдануы.*

Теорема 5.1.4. *Ω облысында гармоникалық $u(x)$ функциясы осы гармоникалық Ω облысының кез келген $x \in \Omega$ нүктесінде шексіз дифференциалданады.*

3^0. *Арифметикалық орта мән туралы теорема.*

Айталық, $B(x_0, r)$ – центрі x_0 нүктесіндегі, радиусы r-ге тең шар, ал $\partial B(x_0, r)$ оның беті, яғни сфера болсын.

Теорема 5.1.5. *Егер $u(x)$ функциясы $B(x_0, r)$ шар ішінде гармоникалық, ал $\partial B(x_0, r)$ сферасында үзіліссіз болса, онда оның x_0 центріндегі мәні бүкіл шардың беті (сфера) бойынша арифметикалық орта мәніне тең, яғни*

$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{\partial B(x_0, r)} u ds. \tag{5.1.19}$$

4^0. *Гармоникалық функцияның интеграл арқылы өрнектелуі.*

Теорема 5.1.6. *Айталық, $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ болсын. Онда*

$$u(x) = \int\limits_{\partial\Omega} \left[E(x,\xi) \frac{\partial u(\xi)}{\partial \vec{n}_\xi} - u \frac{\partial E(x,\xi)}{\partial \vec{n}_\xi} \right] ds_\xi - \int\limits_{\Omega} E(x,y) \Delta u(y) dy \tag{5.1.20}$$

теңдігі орынды.

Бұл (5.1.20) өрнек Гриннің негізгі формуласы деп аталады.

Теорема 5.1.7. *Айталық, $u(x)$ функциясы Ω облысында гармоникалық және $u(x) \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ болсын. Онда*

$$u(x) = \int\limits_{\partial\Omega} \left[E(x,\xi) \frac{\partial u(\xi)}{\partial \vec{n}_\xi} - u \frac{\partial E(x,\xi)}{\partial \vec{n}_\xi} \right] ds_\xi \qquad (5.1.21)$$

теңдігі орынды.

(5.1.21) теңдік *гармоникалық $u(x)$ функциясының интеграл арқылы өрнектелу формуласы* деп аталады. Мұндағы $E(x,\xi)$ – Лаплас теңдеуінің іргелі шешімі.

5^0. *Максимум қағидасы.*

Теорема 5.1.8. *Ақырлы Ω облысында гармоникалық және $\overline{\Omega}$ тұйық облысында үзіліссіз $u(x)$ функциясы өзінің ең үлкен және ең кіші мәндеріне Ω облысының тек шекарасында ғана ие болады. Басқаша айтқанда, $\forall x \in \Omega$ үшін*

$$\min_{x\in\partial\Omega} u(x) < u(x) < \max_{x\in\partial\Omega} u(x) \qquad (5.1.22)$$

теңсіздігін қанағаттандырады.

Салдар 1. Ω облысында гармоникалық және $\overline{\Omega}$ облысында үзіліссіз $u(x)$ функциясы өзінің ең үлкен мәнін (ең кіші мәнін) Ω облысының ішкі нүктесінде қабылдайтын болса, онда ол бүкіл $\overline{\Omega}$ облысында тұрақты функция болады, яғни $u(x) = const$.

Салдар 2. Егер Ω облысында гармоникалық және $\overline{\Omega}$ тұйық облысында үзіліссіз $u(x)$ және $v(x)$ функциялары $\partial\Omega$ шекарада

$$u(x) \leq v(x), \; x \in \partial\Omega$$

теңсіздігін қанағаттандырса, онда бүкіл $\overline{\Omega}$ тұйық облысында

$$u(x) \leq v(x), \; x \in \overline{\Omega}$$

теңсіздігі орындалады.

6^0. *Лаплас теңдеуі үшін Дирихле есебі шешімінің жалғыздығы және орнықтылығы.*

Теорема 5.1.9. *Лаплас теңдеуіне қойылған Дирихле есебінің шешімі жалғыз.*

Дәлелдеуі. Кері жорып, есептің әр түрлі $u_1(x) \neq u_2(x)$ екі шешімі бар болсын делік, яғни

$$\begin{array}{l} \Delta u_k = 0, \; x \in \Omega, \\ u_k|_{\partial\Omega} = \varphi, \;\; x \in \partial\Omega, \qquad u_k \in C\left(\overline{\Omega}\right), \;\; k = 1, 2. \end{array}$$

Бұл u_1 және u_2 шешімдерінің айырмасы $u = u_1 - u_2$ үшін

$$\begin{aligned}&\Delta u = 0,\ x \in \Omega,\\ &u|_{\partial\Omega} = 0,\ \ x \in \partial\Omega,\ \ u \in C\left(\overline{\Omega}\right)\end{aligned}$$

біртекті есебін аламыз. Бұдан, максимум қағидасы бойынша $\forall x \in \Omega$ үшін $u(x) \equiv 0$. Демек, $u_1 \equiv u_2$, яғни қарама-қайшылыққа келеміз.

Теорема 5.1.10. *Лаплас теңдеуіне қойылған Дирихле есебінің шешімі орнықты.*

Дәлелдеуі. Айталық, $u_1(x), u_2(x)$ функциялары

$$\begin{aligned}&\Delta u_k = 0,\ x \in \Omega,\\ &u_k\,|_{\partial\Omega} = \varphi_k(x),\quad x \in \partial\Omega,\quad u_k \in C\left(\overline{\Omega}\right),\quad k = 1,\ 2\end{aligned}$$

Дирихле есептерінің шешімдері болсын. Егер $\forall\varepsilon > 0$ үшін $\exists\delta(\varepsilon) > 0$ табылып, $|f_1 - f_2| < \delta \Rightarrow\ |u_1 - u_2| < \varepsilon$ болса, онда $u = u_1 - u_2$ үшін u – гармоникалық және $\partial\Omega$ шекарада $|u| = |f_1 - f_2| < \delta$ орындалады. Салдар 2 $\Rightarrow |u| < \delta < \varepsilon,\ \forall x \in \Omega$.

7^0. *Аналитикалық функция мен гармоникалық функция арасындағы байланыс.*

Теорема 5.1.11. *Егер комплекс айнымалы $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ функциясы аналитикалық болса, онда оның $u(x)$, $v(x)$ нақты және жорамал бөліктері гармоникалық функциялар болады.*

Дәлелдеуі. Аналитикалық функция болудың қажетті және жеткілікті шарты – Коши-Риман шартын қолданамыз:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}.\end{cases}$$

Бұл Коши-Риман шартының біріншісін x бойынша, екіншісін y бойынша дифференциалдап қоссақ, $u_{xx} + u_{yy} = \Delta u = 0$ теңдігін аламыз. Дәл сол сияқты біріншісін y бойынша, екіншісін x бойынша дифференциалдап алсақ, $v_{xx} + v_{yy} = \Delta v = 0$ теңсіздігін аламыз.

Мұндай нақты және жорамал бөліктері болатын гармоникалық $u(x), v(x)$ функцияларын *түйіндес гармоникалық функциялар* деп атайды.

Мысал 5.1.2. *$u(x,y) = x^2 - y^2 - x$ гармоникалық функциясы берілген. Оған түйіндес $v(x,y)$ гармоникалық функциясын анықтаңыз.*

Шешуі. Коши-Риман шарты бойынша:

$$\left.\begin{aligned}u_x = 2x - 1 = v_y\\ u_y = -2y = -v_x\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases}v_y = 2x - 1\\ v_x = 2y.\end{cases}$$

Бірінші теңдікті y бойынша интегралдасақ: $v = 2xy - y + \varphi(x)$, мұндағы $\varphi(x)$ – кез келген еркін функция. Мұны екінші теңдігіне қойсақ:

$$2y + \varphi'(x) = 2y \;\Rightarrow\; \varphi'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \varphi(x) = C.$$

Демек, $v(x, y) = 2xy - y + C$ – гармоникалық. Ал

$$f(z) = x^2 - y^2 - x + i(2xy - y + C) = z^2 - z + iC$$

функциясы аналитикалық функция.

5.1.5. Жаттығулар

5.1.1. *$u(x)$ функциясы гармоникалық болатындай α параметрінің мәндерін табыңыздар:*
а). $u(x, y, z) = x^2 + y^2 + \alpha z^2$;
ә). $u(x) = r^{-\alpha}$, мұндағы $r^2 = x_1^2 + ... + x_n^2$, ($x = 0$ нүктесі енбейтін облыста).

5.1.2. *Айталық, $u(x)$ функциясы $D \subset \mathbb{R}^n$ облысында гармоникалық болсын.*
а). $v(x) = u(x + h)$, $h = const \in \mathbb{R}^n$ функциясы $D' \equiv D - h = \{x - h : x \in D\}$ облысында гармоникалық функция бола ма?
ә). $v(x) = \sum\limits_{k=1}^{4} x_k \dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ функциясы D облысында гармоникалық функция бола ма?
б). $v(x) = u(\lambda x)$, $\lambda = const \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ функциясы гармоникалық функция бола ма және қандай облыста гармоникалық болады?

5.1.3. *Төменде $f(x, y)$ аналитикалық функциясының $Ref(z) = u(x, y)$ нақты бөлігі берілген. Оған түйіндес $Imf(z) = v(x, y)$ гармоникалық функцияны анықтап, $f(x, y)$ аналитикалық функциясын құрыңыз:*
а). $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$;
ә). $u(x, y) = e^x \sin y$;
б). $u_x(x, y) = y^3 - 3x^2 y$;

5.1.4. *$\mathbb{R}^3$ кеңістігінде $\Delta u(r) = \ln r$ теңдеуін қанағаттандыратын барлық $u = u(r)$ функцияларды анықтаңыз.*

5.1.5. *$\mathbb{R}^2$ жазықтығындағы $a < r < b$ сақинада гарманикалық ($\Delta u = 0$) және шекарада*

$$u|_{r=a} = T, \;\; (u_r + u)|_{r=b} = U, \;\; 0 < a < b < \infty, \;\; T, U = const$$

шарттарды қанағаттандыратын $u = u(r)$ функциясын табыңыз.

5.1.6. *Егер $u_y = e^x \cos y$ болса, Коши-Риман теңдеулер жүйесін пайдаланып, гармоникалық $u(x, y)$ функциясын анықтаңыз.*

5.1.7. *$\Delta u(r) = 0$, $u(a) = A$, $u_r(b) = B$ шарттарды қанағаттандыратын $0 < a < r < b$ сақинада $u = u(r)$ гармоникалық функцияны анықтаңыз, мұндағы $a, b, A, B = const$.*

5.1.8. *Айталық,* $u(r)$ $K: a < r < b,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 < a < b < \infty$ *шар қабатында гармоникалық және* $\overline{K}$ *тұйық облыста үзіліссіз функция болсын. Егер:*
а). $u(c) = A,\ \ u(b) = B,\ r = \sqrt{x^2+y^2},\ (n = 2)$*;*
ә). $u(c) = A,\ \ u_r(b) = B,\ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ (n = 3)$ *болса,* $u(a)$ *мәнін қалай таңдау керек? Мұндағы* $a < c < b,\ \ a, b, c, A, B = const.$

5.1.9. $x^2 + y^2 = r^2 < R^2$ *шеңбері ішінде келесі Нейман есебі дұрыс қойылған ба? a және b тұрақтыларының қандай мәндерінде дұрыс қойылады?*

$$\triangle u(x,y) = 0,\ \ 0 \le r < R,\ \ \frac{\partial u(x,y)}{\partial r}\Big|_{r=R} = ax^2 - by^2 + y.$$

5.1.10. $u(r)$ *функциясы* $D := \left\{a < r < b,\ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\ 0 < a < b < \infty\right\}$ *шар қабатында гармоникалық және* $\overline{D}$ *тұйық облыста үзіліссіз. Егер*

$$u(c) = P,\ \ u_r(b) = T,\ \ a,\ b,\ c,\ P,\ T = const$$

белгілі болса, $u(a)$ *мәні неге тең?*

5.1.11. $u(r)$ *функциясы* $D := \left\{a < r < b,\ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\ 0 < a < b < \infty\right\}$ *шар қабатында гармоникалық және* $\overline{D}$ *тұйық облыста үзіліссіз. Егер*

$$u_r(c) = P,\ \ u(b) = T,\ \ a,\ b,\ c,\ P,\ T = const$$

белгілі болса, $u(a)$ *мәні неге тең?*

5.1.12. *Егер* $u_x(x,y,z) = \sinh(x)\cos(z) + 2xy$ *болса, гармоникалық* $u(x,y,z)$ *функциясын табыңыз.*

5.1.13. *Айталық,* $u(r)$ *функциясы* $K : x^2 + y^2 = r^2 < R^2$ *шеңберінде* $\triangle u(x,y) = kr,\ k = const$ *Пуассон теңдеуінің шешімі және* $\overline{K}$ *тұйық облысында үзіліссіз болсын. Егер* $u(c) = A$ *белгілі болса,* $u(R)$ *мәнін анықтаңыз, мұндағы* $0 \le c < R,\ c, A, R = const.$

5.1.14. D *облысында гармоникалық болатын* $u(x,y) = xy$ *функциясының* $\overline{D} = \left\{x^2 + y^2 \le 1\right\}$ *тұйық облысындағы экстремум нүктелерін табыңыз.*

5.1.15. $u = x^2 - y^2$ *функциясының* $\overline{D} = \left\{(x,y) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1\right\}$ *облысындағы экстремум нүктелерінде* D *облысының* S *шекарасына тұрғызылған сыртқы* n *нормал бойынша* $\frac{\partial u}{\partial n}$ *туындысының мәндерін табыңыз.*

5.1.6. Жауаптары

5.1.1. ***а).*** $\alpha = -2$; ***ә).*** $\alpha = 0$ *және* $\alpha = n - 2$, *егер* $n > 2$ *болса.*

5.1.2. *а). гармоникалық; ә). гармоникалық; б). гармоникалық.*

5.1.3. *а).* $v(x,y) = 2xy + 2y + C,\ f(z) = z^2 + 2z + iC,\ C = const \in \mathbb{R};$
ә). $v(x,y) = -e^x \cos y + C,\ f(z) = i\left(C - e^z\right),\ C = const \in \mathbb{R};$
б). $v(x,y) = \frac{1}{4}\left(x^4 + y^4\right) - \frac{3}{2}x^2y^2 + C_1x + C_2,\ f(z) = u + iv,\ C_1, C_2 = const \in \mathbb{R}.$

5.1.4. $u(r) = \dfrac{r^2}{6}\left(\ln r - \dfrac{5}{6}\right) + C,\ \ \forall C = const.$

5.1.5. $u(r) = T + \dfrac{(U-T)b\ln\frac{r}{a}}{1 + b\ln\frac{b}{a}}.$

5.1.6. $u = e^x \sin y + C_1x + C_2.$

5.1.7. $u(r) = A + bB\ln\dfrac{r}{a}.$

5.1.8. *а).* $u(a) = \frac{A\ln\frac{b}{a} - B\ln\frac{c}{a}}{\ln\frac{b}{c}}$; *ә).* $u(a) = A + \dfrac{b^2B(a-c)}{ac}.$

5.1.9. $a = b.$

5.1.10. $u(a) = P + \dfrac{b^2(a-c)T}{ac};$

5.1.11. $u(a) = P + \dfrac{c^2(a-b)T}{ab};$

5.1.12. $u(x,y,z) = shx\cos z + yx^2 - y^2 + g(x,y)$, *мұндағы* $g(x,y)$ *кез келген гармоникалық*

5.1.13. $u(R) = A + \dfrac{k(R^3 - c^3)}{9}.$

5.1.14. $(x,y) = \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$

5.1.15. $(2,0), (-2,0)$ *максимум нүктелерінде* $\frac{\partial u}{\partial n} = 4$, *ал* $(0,3), (0,-3)$ *минимум нүктелерінде* $\frac{\partial u}{\partial n} = -6.$

5.2 Лаплас және Пуассон теңдеулері үшін шеңбер тектес облыстарда қойылған шеттік есептер

5.2.1. Шеңбер ішінде қойылған Лаплас теңдеуі үшін шеттік есептер

$\Omega = \{x^2 + y^2 < R^2\}$ шеңбері ішінде

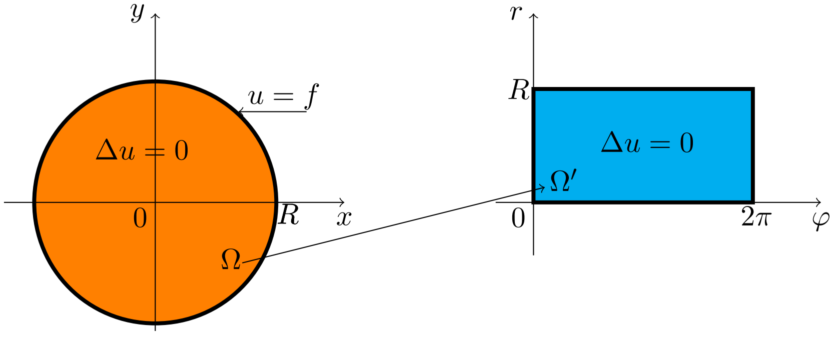
$$\Delta u\,(r, \varphi) = 0 \tag{5.2.23}$$

Лаплас теңдеуін, $\partial\Omega = \{x^2 + y^2 = R^2\}$ шеңбері шекарасында (бойында)

$$u|_{\partial\Omega} = f \tag{5.2.24}$$

шекаралық шартын қанағаттандыратын $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ тұйық облысында үзіліссіз $u\,(x, y)$ шешімін анықтау есебін қарастырайық. Бұл есеп *шеңбер ішінде қойылған Дирихле есебі* деп аталады.

Егер декарттық координат жүйесінен $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ полярлық координат жүйесіне өтсек, $\overline{\Omega} = \{x^2 + y^2 \leq R^2\}$ шеңбері $\overline{\Omega'} = \{0 \leq r \leq R,\ \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ тіктөртбұрышына айналады (5.2.1-сурет).



5.2.1-сурет.

Ал (5.2.23)-(5.2.24) есебі

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (r, \varphi) \in \Omega', \tag{5.2.25}$$

$$u|_{r=R} = f\,(\varphi)\,, \quad f\,(\varphi + 2\pi) = f\,(\varphi)\,, \ \ \varphi \in [0,\ 2\pi] \tag{5.2.26}$$

түрге келеді. Бұл жағдайда $u\,(r, \varphi)$ ізделінді шешімі периодты функция екендігі анық, яғни

$$u\,(r, \varphi + 2\pi) = u\,(r, \varphi)\,. \tag{5.2.27}$$

Сонымен қатар $r = 0$ шеңбер центрінде $u\,(r, \varphi)$ функциясы r және φ бойынша үзіліссіз дифференциалданады. Сондықтан $r = 0$ нүктеде шешілген

$$|u\,(0, \varphi)| < const. \tag{5.2.28}$$

Фурье әдісі бойынша (5.2.25)-(5.2.26) есептің шешімін

$$u\left(r,\varphi\right)=R\left(r\right)\Phi\left(\varphi\right)\neq0 \tag{5.2.29}$$

түрінде іздейміз. Мұны (5.2.27) және (5.2.28) шарттарға қойсақ, бірден

$$\Phi\left(\varphi+2\pi\right)=\Phi\left(\varphi\right), \tag{5.2.30}$$

$$\left|R\left(0\right)\right|<const \tag{5.2.31}$$

шарттарын аламыз. Ал (5.2.25) теңдеуге қойсақ,

$$R^{''}\left(r\right)\Phi+\frac{1}{r}R^{'}\Phi+\frac{1}{r^2}R\Phi''=0.$$

Екі жағын $\dfrac{r^2}{R\Phi}$ көбейтіп,

$$\frac{r^2R''+rR'}{R}=-\frac{\Phi''}{\Phi}=\lambda \tag{5.2.32}$$

теңдігін, ал бұдан келесі екі ЖДТ аламыз:

$$r^2R''+rR'-\lambda R=0, \tag{5.2.33}$$

$$\Phi''+\lambda\Phi\left(\varphi\right)=0. \tag{5.2.34}$$

Енді (5.2.34), (5.2.30) Штурм-Лиувиль есебін қарастырайық:

а) Айталық, $\lambda=0$ болсын. Онда (5.2.34) теңдеудің жалпы шешімі:

$$\Phi\left(\varphi\right)=c_1\varphi+c_2.$$

Бұдан (5.2.30) шарты бойынша, $c_1=0$, ал C_2 – кез келген тұрақты. Олай болса, $\lambda=0$ үшін

$$\Phi_0\left(\varphi\right)=a_0,\ \ a_0=const \tag{5.2.35}$$

ә). Айталық, $\lambda=-\mu^2<0,\ \ (\mu>0)$ теріс сан болсын. Онда (5.2.34) теңдеу

$$\Phi''\left(\varphi\right)-\mu^2\Phi\left(\varphi\right)=0$$

түрде және оның жалпы шешімі:

$$\Phi\left(\varphi\right)=c_1e^{\mu\varphi}+c_2e^{-\mu\varphi}$$

болады. Бұл шешім периодты емес, яғни (5.2.30) шарт орындалмайды. Сондықтан $\lambda=-\mu^2$ меншікті сан бола алмайды.

б) Айталық, $\lambda = \mu^2 > 0$, $\mu > 0$ оң сан болсын. Онда (5.2.34) теңдеу

$$\Phi'' (\varphi) + \mu^2 \Phi (\varphi) = 0$$

түрде жазылады және оның жалпы шешімі:

$$\Phi (\varphi) = a \cos \mu\varphi + b \sin \mu\varphi. \tag{5.2.36}$$

Бұл шешім (5.2.30) периодтылық шартын тек $\mu = n$, $n = 1, 2, 3, ...$ жағдайда ғана қанағаттандырады. Демек, (5.2.34), (5.2.30) есебінің шешімдері

$$\begin{aligned} &\lambda = 0 \text{ кезде } \Phi_0 = a_0, \\ &\lambda = n^2 \text{ кезде } \Phi_n (\varphi) = a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi, \quad n = 1, 2, 3, ... \end{aligned}$$

болады. Енді бұл λ меншікті сандар үшін (5.2.33) теңдеуді шешейік.

а) Егер $\lambda = 0$ болса,

$$r^2 R'' (r) + r R' (r) = 0.$$

Екі жағын $r^2 R' (r)$ қысқартсақ:

$$\frac{R'' (r)}{R'' (r)} + \frac{1}{r} = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \ln |R'| + \ln |r| = \ln c_1 \quad \Rightarrow$$

$$R' (r) = \frac{c_1}{r}, \;\; R (r) = c_1 \ln r + c_2. \tag{5.2.37}$$

Бұдан (5.2.31) шенелгендік шарты бойынша $c_1 = 0$ ал c_2 – кез келген нөлден өзге тұрақты сан болады.

Егер $c_2 = 1$ деп алсақ, $R_0 (r) = 1$. Демек,

$$u_0 (r, \varphi) = \Phi_0 R_0 = a_0. \tag{5.2.38}$$

ә). Енді $\lambda = n^2$, $n = 1, 2, 3, ...$ жағдайды қарастырайық. Бұған сәйкес (5.2.33) теңдеу

$$r^2 R'' + r R' - n^2 R = 0 \tag{5.2.39}$$

түрде жазылады. Бұл теңдеудің шешімін $R (r) = r^m$ түрінде іздейік. Мұндағы m санын r^m теңдеудің шешімі болатындай таңдап аламыз.

$$r^2 m (m - 1) r^{m-2} + r m r^{m-1} - n^2 r^m = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \pm n.$$

Олай болса, (5.2.39) теңдеудің сызықты тәуелсіз дербес шешімдері

$$R_1 (r) = r^n, \;\; R_2 (r) = r^{-n}$$

функциялары, ал жалпы шешімі

$$R_n (r) = c_1 r^n + c_2 r^{-n} \tag{5.2.40}$$

функциясы болады. Шеңбер іші үшін, яғни жоғарыдағы (5.2.31) шарты орындалу үшін $c_2 = 0$ болуы қажет. Ал c_1 еркін тұрақты бола алады. Егер оны $c_1 = 1$ деп таңдап алсақ, онда шешім келесідей болады:

$$R_n(r) = r^n, \; n = 1, 2, 3, ... \tag{5.2.41}$$

Демек, (ізделінді $u(r,\varphi)$ шешім) (5.2.25)-(5.2.26) есебінің шенелген әрі периодты шешімдері:

$$u_0(r,\varphi) = a_0,$$
$$u_n(r,\varphi) = r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), \;\; n = 1, 2, 3, ...$$

болады. Ал жалпы шешім суперпозиция қағидасы бойынша

$$u(r,\varphi) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \tag{5.2.42}$$

қатарымен анықталады. Мұндағы $a_i, b_j, \; i = \overline{0,\infty}, \; j = \overline{1,\infty}$ белгісіз коэффиценттерін (5.2.26) шекаралық шарт орындалатындай таңдап аламыз.

Айталық, $f(\varphi)$ функциясы $\{1, \cos n\varphi, \sin n\varphi\}_{n=1}^{\infty}$ толық ортогонал жүйесі бойынша Фурье қатарына жіктелінсін, яғни

$$f(\varphi) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \tag{5.2.43}$$

мұндағы A_n, B_n Фурье коэффиценттері:

$$\begin{gathered} A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi, \quad A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \\ B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi, \; n = 1, 2, 3, ... \end{gathered} \tag{5.2.44}$$

(5.2.26) шекаралық шарт бойынша $r = R$ жағдайда (5.2.42) және (5.2.43) қатарларды салыстырып,

$$a_0 = A_0; \;\; a_n = \frac{A_n}{R^n}, \; b_n = \frac{B_n}{R^n} \tag{5.2.45}$$

белгісіз коэффиценттерін анықтаймыз. Бұл анықталған коэффициенттерді (5.2.42) қатарға қойсақ, Дирихленің шеңбер ішіндегі шешімін аламыз:

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi). \tag{5.2.46}$$

5.2.2. Шеңбер сыртында қойылған Лаплас теңдеуі үшін шеттік есептер

Есептің қойылымы. $\Omega = \{x^2 + y^2 = r^2 > R^2\}$ шеңбері сыртында келесі Дирихле есебінің шешімін анықтайық:

$$\Delta u\left(x, y\right) = 0, \Omega = \{x^2 + y^2 = r^2 > R^2\}, \tag{5.2.47}$$

$$u|_{\partial\Omega} = f,\ \partial\Omega = \{x^2 + y^2 = R^2\}. \tag{5.2.48}$$

Бұл есеп жоғарыдағы ішкі есеп тәрізді шешіледі. Алайда Ω облысы шенелмеген облыс болғандықтан, шешімнің шексіздікте шенелген болуы талап етіледі, яғни

$$\left|u\left(M\right)\right| < c, \quad M\left(x, y\right) \to \infty. \tag{5.2.49}$$

Сондықтан (5.2.40) жалпы шешімде $c_1 = 0$ болуы талап етіледі. Олай болса, сыртқы есеп үшін (5.2.39) теңдеудің шешімі

$$R_n\left(r\right) = r^{-n}$$

түрде болады. Демек, Дирихленің сыртқы есебінің жалпы шешімі

$$u\left(r, \varphi\right) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r^{-n}\left(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi\right) \tag{5.2.50}$$

формуламен анықталады. Мұнда

$$a_0 = A_0, \quad a_n = A_n R^n, \quad b_n = B_n R^n, \quad n = 1, 2, 3, ..., \tag{5.2.51}$$

ал A_n, B_n сандары (5.2.44) формуламен есептелінеді.

Ескерту 5.2.1. *Жоғарыдағы табылған* (5.2.46) *және* (5.2.50) *қатарлары сәйкес Дирихленің ішкі және сыртқы есептерінің формалды шешімдері. Бірақ олардың сәйкес $r < R$ және $r > R$ облыстарында бірқалыпты жинақтылығын әрі Дирихле есебінің шешімі болатындығын дәлелдеуге болады* [4].

Ескерту 5.2.2. *Егер* (5.2.23)-(5.2.24) *және* (5.2.47)-(5.2.48) *есептері – Дирихле шартының орнында үшінші шеттік немесе Нейман шартымен қойылан ішкі немесе сыртқы есептер болса, онда да олар дәл осындай жолмен шешіледі. Бұл кезде тек a_n, b_n коэффиценттерінде ғана өзгешеліктер болады.*

[4] [11], [12] - әдебиеттерден табуға болады

Мысал 5.2.1. $(x+1)^2 + y^2 < 1$ *шеңбері ішінде келесі Дирихле есебін шешіңіз:*

$$\Delta u\,(x,y) = 0, \quad \Omega = \{(x+1)^2 + y^2 < 1\},$$

$$u|_{\partial\Omega} = 4x^3 + 6x - 1, \quad \partial\Omega = \{(x+1)^2 + y^2 = 1\}.$$

Шешуі. Есептің шешімі полярлық координат жүйесінде (5.2.46) формуламен өрнектеледі:

$$u\,(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right).$$

Егер

$$\begin{cases} x + 1 = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

бойынша полярлық координат жүйесіне өтсек,

$$\Omega' = \{0 \le r \le 1, \;\; 0 \le \varphi \le 2\pi\}$$

және шекаралық функция

$$f\,(r,\varphi) = 4\,(r\cos\varphi - 1)^3 + 6\,(r\cos\varphi - 1) - 1.$$

Шекарадағы мәні:

$$f\,(r,\varphi)|_{r=1} = 4\,(r\cos\varphi - 1)^3 + 6\,(r\cos\varphi - 1) - 1 =$$

$$4\cos^3\varphi - 12\cos^2\varphi + 12\cos\varphi - 4 + 6\cos\varphi - 6 - 1 =$$

$$4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi - 12\cos^2\varphi + 21\cos\varphi - 11 = \cos 3\varphi - 6\cos 2\varphi - 17 + 21\cos\varphi.$$

Бұдан (5.2.44), (5.2.45) формулалар бойынша Фурье коэффициенттерін есептесек,

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\cos 3\varphi - 6\cos 2\varphi - 17 + 21\cos\varphi)\,d\varphi =$$
$$\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{3}\sin 3\varphi - 3\sin 2\varphi + 21\sin\varphi - 17\varphi\right]\Big|_0^{2\pi} = -17,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (\cos 3\varphi - 6\cos 2\varphi - 17 + 21\cos\varphi)\cos n\varphi d\varphi = \begin{cases} 21, & n = 1, \\ -6, & n = 2, \\ -1, & n = 3, \\ 0, & n = 0, 4, 5, ..., \end{cases}$$

$$b_n = B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (\cos 3\varphi - 6\cos 2\varphi - 17 + 21\cos\varphi)\sin n\varphi d\varphi = 0.$$

Олай болса, полярлық координат жүйесінде табылған шешім

$$u(r,\varphi) = -17 + 21r\cos\varphi - 6r^2\cos 2\varphi + r^3\cos 3\varphi.$$

Енді кері декарттық жүйесіне көшсек,

$$u(x,y) = -17 + 21r\cos\varphi - 6r^2\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) + r^3\left(4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi\right) =$$

$$-17 + 21(x+1) - 6(x+1)^2 + 6y^2 + 4(x+1)^3 - 3\left((x+1)^2 + y^2\right)(x+1) =$$

$$x^3 - 3x^2 + 3y^2 + 12x - 3xy^2 - 1.$$

Жауабы: $u(x,y) = x^3 - 3x^2 + 3y^2 + 12x - 3xy^2 - 1.$

Бұл есепті (5.2.44)-(5.2.45) интегралдарды есептемей-ақ *анықталмаған коэффициенттер* әдісін қолданып шешу жеңілірек болады. (5.2.46) формула бойынша

$$u(r,\varphi)|_{r=1} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi)\bigg|_{r=1} =$$

$$a_0 + a_1\cos\varphi + b_1\sin\varphi + a_2\cos 2\varphi + b_2\sin 2\varphi + a_3\cos 3\varphi + b_3\sin 3\varphi = ... \tag{5.2.52}$$

Екінші жағынан шекаралық шарт бойынша

$$u(1,\varphi) = f(1,\varphi) = \cos 3\varphi - 6\cos 2\varphi + 21\cos\varphi - 17. \tag{5.2.53}$$

Бұл (5.2.52), (5.2.53) өрнектерін салыстырып, $\cos n\varphi$, $\sin n\varphi$, $n = 0, 1, 2, ...$ функцияларының алдындағы коэффиценттерін теңестірсек:

$$a_0 = -17,\ a_1 = 2,\ a_2 = -6,\ a_3 = 1,\ \ a_4 = a_5 = ... = 0,$$
$$b_1 = b_2 = ... = 0.$$

Демек, шешім

$$u(r,\varphi) = -17 + 21r\cos\varphi - 6r^2\cos 2\varphi + r^3\cos 3\varphi$$

немесе декарттық координат жүйесінде

$$u(x,y) = x^3 - 3x^2 + 3y^2 + 12x - 3xy^2 - 1.$$

Мысал 5.2.2. *Дирихленің сыртқы есебін шешіңіз:*

$$\Delta u(x,y) = 0, \quad x^2 + y^2 > R^2,$$

$$u(x,y) = y^2 - xy, \quad x^2 + y^2 = R^2.$$

Шешуі. (5.2.50) формуламен анықталынған $u\left(r,\varphi\right)$ шешімі $r = R$ шекарада

$$u\left(r,\varphi\right)|_{r=R} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^n \left(a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi\right)\Big|_{r=R} =$$

$$a_0 + \frac{a_1}{R}\cos\varphi + \frac{b_1}{R}\sin\varphi + \frac{a_2}{R^2}\cos 2\varphi + \frac{b_2}{R^2}\sin 2\varphi + \ldots.$$

Ал шекарадағы мәні (шекаралық шарт) бойынша

$$u\left(R,\varphi\right) = f\left(R,\varphi\right) = \left(y^2 - xy\right)\Big|_{\substack{x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi}} =$$

$$R^2\sin^2\varphi - R^2\sin\varphi\cos\varphi =$$

$$\frac{R^2}{2}\left(1-\cos 2\varphi\right) - \frac{R^2}{2}\sin 2\varphi = \frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{2}\cos 2\varphi - \frac{R^2}{2}\sin 2\varphi.$$

Соңғы екі өрнекті салыстырып,

$$a_0 = \frac{R^2}{2},\ a_1 = 0,\ \ a_2 = -\frac{R^4}{2},\ a_3 = a_4 = a_5 = ... = 0,$$

$$b_1 = 0,\ b_2 = -\frac{R^4}{2},\ \ b_3 = b_4 = ... = 0$$

коэффициенттерін анықтаймыз. Олай болса,

$$u\left(r,\varphi\right) = \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{2r^4}\cos 2\varphi - \frac{R^4}{2r^4}\sin 2\varphi$$

немесе

$$u\left(x,y\right) = \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{2r^4}\left(r^2\cos 2\varphi - r^2\sin 2\varphi\right)\Big|_{\substack{x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi}} =$$

$$= \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{2r^4}\left(r^2\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) - 2r^2\cos\varphi\sin 2\varphi\right)\Big|_{\substack{x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi}} =$$

$$\frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{2\left(x^2+y^2\right)^2}\left(x^2 - y^2 - 2xy\right).$$

Жауабы:

$$u\left(x,y\right) = \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{2\left(x^2+y^2\right)^2}\left(x^2 - y^2 - 2xy\right).$$

Мысал 5.2.3. *Полярлық координат жүйесінде берілген келесі Нейманның ішкі есебінің шешімін анықтаңыз:*

$$\Delta u\,(r,\varphi) = 0, \qquad \Omega = \{0 < r < R,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = \cos^3\varphi, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Шешуі. Әуелі, Нейман есебінің $\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$ шешімділік шартын тексерейік.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=R} = \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} \quad \Rightarrow$$

$$\int\limits_{\partial\Omega'} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int\limits_0^{2\pi} \cos^3\varphi d\varphi = \frac{3}{4}\int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi + \frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi} \cos 3\varphi d\varphi = 0. \qquad \checkmark$$

Екіншіден, (5.2.42) формула бойынша

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = \left.\sum_{k=1}^{\infty} n r^{n-1}\left(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi\right)\right|_{r=R} =$$

$$a_1\cos\varphi + b_1\sin\varphi + 2R_1a_2\cos 2\varphi + 2R_1b_2\sin 2\varphi +$$
$$3R^2a_3\cos 3\varphi + 3R^2\sin 3\varphi + ... =$$

$$\frac{3}{4}\cos\varphi + \frac{1}{4}\cos 3\varphi.$$

Бұдан

$$a_0 = c = const,\ \ a_1 = \frac{3}{4},\ \ a_3 = \frac{1}{12R^2},\ \ a_i = 0,\ i = 2,4,6,\ \ldots,$$

$$b_j = 0,\ \ j = 0,1,2,\ \ldots.$$

Демек, шешім

$$u\,(r,\varphi) = \frac{3}{4} r\cos\varphi + \frac{r^3}{12R^2}\cos 3\varphi + c,\ \ c = const.$$

5.2.3. Сақинада қойылған Лаплас теңдеуі үшін шеттік есептер

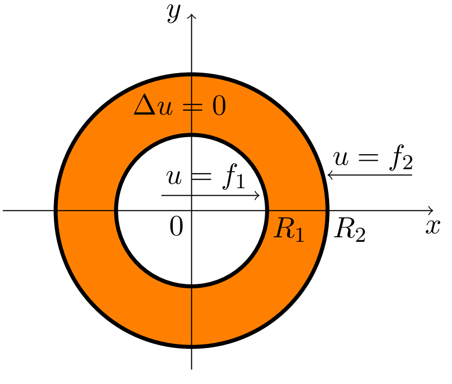
Радиустары R_1 және R_2 $(R_1 < R_2)$, центрі бас нүктеде орналасқан екі шеңбердің арасындағы сақинада (5.2.3-сурет)

$$\Delta (x, y) = 0, \quad R_1^2 < x^2 + y^2 < R_2^2$$

Лаплас теңдеуін қанағаттандыратын және сақина шекарасында

$$u|_{x^2+y^2=R_1^2} = f_1 (x, y), \quad u|_{x^2+y^2=R_2^2} = f_2 (x, y) \tag{5.2.54}$$

шарттарын қанағаттандыратын $u (x, y)$ шешімін табу есебін қарастырайық.



5.2.3-сурет.

Жоғарыдағыдай, декарттық координат жүйесінен полярлық координат жүйесіне (5.1.3) өтсек, бұл есеп

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad R_1 < r < R_2,\ 0 < \varphi < 2\pi, \\ u (R_1, \varphi) = f_1 (\varphi), \\ u (R_2, \varphi) = f_2 (\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \tag{5.2.55}$$

түрде қойылады. Мұнда $f_1 (\varphi)$, $f_2 (\varphi)$ шекаралық функциялары 2π периодты деп қабылдаймыз. Фурье әдісін қолданып, шешімді $u (r, \varphi) = R (r) \Phi (\varphi) \neq 0$ түрінде іздесек, нәтижеде

$$r^2 R'' + r R' - \lambda^2 R = 0, \tag{5.2.56}$$

$$\begin{array}{l} \Phi'' (\varphi) + \lambda^2 \Phi (\varphi) = 0, \\ \Phi (\varphi + 2\pi) = \Phi (\varphi) \end{array} \tag{5.2.57}$$

теңдеулеріне келеміз. (5.2.57) есептің периодтық шартын қанағаттандыратын шешімдері тек $\lambda_n = \pm n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$ жағдайда ғана бар болады және оларға сәйкес дербес шешімдері

$$\Phi_{1n} = \cos n\varphi, \quad \Phi_{2n} = \sin n\varphi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

ал мұндай λ_n сәйкес (5.2.56) теңдеудің сызықты тәуелсіз дербес шешімдері

$$R_{10} = 1, \;\; R_{20} = \ln r, \;\; n = 0,$$

$$R_{1n} = r^n, \;\; R_{2n} = r^{-n}, \;\; n = 1, 2, 3, \ldots$$

болады. Олай болса, (5.2.55) есептің жалпы шешімі:

$$u\left(r, \varphi\right) = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(a_n r^n + b_n r^{-n}\right) \cos n\varphi + \left(c_n r^n + d_n r^{-n}\right) \sin n\varphi \right] \tag{5.2.58}$$

түрде болады. Мұндағы a_i, b_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ белгісіз коэффиценттерді шекаралық шарттарды қолданып анықтаймыз, яғни

$$a_0 + b_0 \ln R_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(a_n R_1^n + b_n R_1^{-n}\right) \cos n\varphi + \left(c_n R_1^n + d_n R_1^{-n}\right) \sin n\varphi \right] = f_1\left(\varphi\right),$$

$$a_0 + b_0 \ln R_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(a_n R_2^n + b_n R_2^{-n}\right) \cos n\varphi + \left(c_n R_2^n + d_n R_2^{-n}\right) \sin n\varphi \right] = f_2\left(\varphi\right).$$

Бұл екі қатарды екінші жағынан $f_1\left(\varphi\right)$ және $f_2\left(\varphi\right)$ функциялары үшін Фурье қатары деп қабылдап, Фурье коэффиценттері бойынша, a_0, b_0 коэффиценттеріне қатысты

$$\begin{cases} a_0 + b_0 \ln R_1 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f_1\left(\varphi\right) d\varphi, \\ a_0 + b_0 \ln R_2 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f_2\left(\varphi\right) d\varphi \end{cases} \tag{5.2.59}$$

жүйесін, a_n, $b_{n,}$ $n = 1, 2, 3, \ldots$ коэффиценттеріне байланысты

$$\begin{cases} a_n R_1^n + b_n R_1^{-n} = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f_1\left(\varphi\right) \cos n\varphi d\varphi, \\ a_n R_2^n + b_n R_2^{-n} = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f_2\left(\varphi\right) \cos n\varphi d\varphi \end{cases} \tag{5.2.60}$$

жүйесін және c_n, d_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ коэффиценттеріне байланысты

$$\begin{cases} c_n R_1^n + d_n R_1^{-n} = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int\limits_0^{2\pi} f_1(\varphi) \sin n\varphi d\varphi, \\ c_n R_2^n + d_n R_2^{-n} = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int\limits_0^{2\pi} f_2(\varphi) \sin n\varphi d\varphi \end{cases} \tag{5.2.61}$$

жүйесін аламыз. Бұл (5.2.59)-(5.2.61) теңдеулер жүйелерінен a_0, b_0, a_n, b_n, c_n, d_n белгісіз коэффициенттерін анықтап, (5.2.58) қойсақ, ізделінді шешімді аламыз.

Мысал 5.2.4. *Келесі сақинада берілген Дирихле есебін қарастырайық:*

$$\begin{cases} \Delta u(r, \varphi) = 0, \quad 1 < r < 2, \; 0 < \varphi < 2\pi, \\ u(1, \varphi) = \cos\varphi, \; 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ u(2, \varphi) = 3\sin 2\varphi, \; 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$$

Шешуі. Біріншіден, (5.2.58) формула бойынша шекаралық шарттарды қолдансақ:

$$u(1, \varphi) = a_0 + (a_1 + b_1)\cos\varphi + (c_1 + d_1)\sin\varphi + (a_2 + b_2)\cos 2\varphi +$$

$$(c_2 + d_2)\sin 2\varphi + \ldots = \cos\varphi,$$

$$u(2, \varphi) = a_0 + b_0 \ln 2 + \left(2a_1 + \frac{b_1}{2}\right)\cos\varphi + \left(2c_1 + \frac{d_1}{2}\right)\sin\varphi +$$

$$\left(4a_2 + \frac{b_2}{4}\right)\cos 2\varphi + \left(4c_2 + \frac{d_2}{4}\right)\sin 2\varphi + \ldots = 3\sin 2\varphi.$$

Бұдан $n = 1, 2$ жағдайда, яғни a_1, b_1, c_2, d_2 коэффициенттері үшін

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = 1 \\ 2c_1 + \dfrac{b_1}{2} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} c_2 + d_2 = 0 \\ 4c_2 + \dfrac{d_2}{4} = 3 \end{cases} \tag{5.2.62}$$

теңдеулер жүйесін аламыз, ал қалған a_i, b_i, c_i, d_i коэффициенттерінің барлығы нөлге тең. Бұл жүйелердің шешімдері:

$$a_1 = -\frac{1}{3}, \; b_1 = \frac{4}{3}, \; c_2 = \frac{4}{5}, \; d_2 = -\frac{4}{5}.$$

Демек, шешім (5.2.58) бойынша:

$$u(r, \varphi) = \left(-\frac{1}{3}r + \frac{4}{3r}\right)\cos\varphi + \left(\frac{4}{5}r^2 - \frac{4}{5r^2}\right)\sin 2\varphi.$$

Екіншіден, жоғарыдағы (5.2.59)-(5.2.61) формулаларын қолдансақ, онда да ортогональдық қасиеті бойынша (5.2.62) жүйеге келеміз. Қалған коэффициенттері нөлге тең болады.

5.2.4. Сақинада қойылған Пуассон теңдеуі үшін шеттік есептер

Есептің қойылымы. Төмендегі Пуассон теңдеуі үшін сақинада қойылған үшінші шеттік есепті қарастырайық:

$$\Delta u = f(r, \varphi), \quad r_1 < r < r_2, \tag{5.2.63}$$

$$u|_{r=r_1} = g_1(\varphi), \tag{5.2.64}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_2} = g_2(\varphi). \tag{5.2.65}$$

Есептің берілу облысы шеңбер типті болғандықтан, (5.2.63) теңдеу (r, φ) полярлық координат жүйесінде

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = f(r, \varphi) \tag{5.2.66}$$

түрде жазылады. Бұл (5.2.66) теңдеудің шешімін

$$u(r, \varphi) = a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r)\cos\, n\varphi + b_n(r)\sin\, n\varphi \tag{5.2.67}$$

тригонометриялық Фурье қатары түрінде іздейміз, мұндағы $a_0(r)$, $a_n(r)$, $b_n(r)$ – әзірге белгісіз функциялар. Алда оларды анықтап, бастапқы (5.2.63)-(5.2.65) есептің шешімін табатын боламыз.

Ол үшін алдымен $f(r, \varphi)$ функциясын Фурье қатарына жіктеп (мұнда, әрине, жіктеледі деп жоримыз)

$$f(r, \varphi) = \tilde{a}_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n(r)\cos\, n\varphi + \tilde{b}_n(r)\sin\, n\varphi \tag{5.2.68}$$

және оны (5.2.67) түрде ізделінген $u(r, \varphi)$ функциясымен қоса (5.2.66) теңдеуге қоямыз, яғни

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{da_0(r)}{dr}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{da_n(r)}{dr}\right) - \frac{n^2}{r^2}a_n(r)\right]\cos n\varphi +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{db_n(r)}{dr}\right) - \frac{n^2}{r^2}b_n(r)\right]\sin n\varphi = \tag{5.2.69}$$

$$\tilde{a}_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\tilde{a}_n(r)\cos n\varphi + \tilde{b}_n(r)\sin n\varphi\right].$$

Бұл теңдіктен, $f(r,\varphi)$ функциясы үшін Фурье коэффициенттерін ескеріп, *анықталмаған коэффициенттер әдісі* бойынша келесі теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{da_0(r)}{dr}\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(r,\varphi)\,d\varphi=\tilde{a}_0(r)\,, \tag{5.2.70}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{da_n(r)}{dr}\right)-\frac{n^2a_n(r)}{r^2}=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(r,\varphi)\cos\ n\varphi d\varphi=\tilde{a}_n(r)\,, \tag{5.2.71}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{db_n(r)}{dr}\right)-\frac{n^2b_n(r)}{r^2}=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(r,\varphi)\sin\ n\varphi d\varphi=\tilde{b}_n(r)\,. \tag{5.2.72}$$

Бұл (5.2.70)-(5.2.72) дифференциалдық теңдеулерін шешіп, $a_0(r)\,,\quad a_n(r)\,,\quad b_n(r)$ коэффициенттерін анықтаймыз. Бұлар жалпы шешімдер болғандықтан, олар кез келген тұрақты санға дейінгі дәлдікпен анықталады. Мәселен, (5.2.70) теңдеу – реті төмендетілетін теңдеу және оның жалпы шешімі

$$a_0(r)=A_0(r)+E_0+F_0\ln\ r \tag{5.2.73}$$

түрде болады, мұндағы $A_0(r)$ – белгілі функция, ал E_0 және F_0 – кез келген тұрақты сандар. (5.2.71) теңдеу

$$r^2a_n''(r)+ra_n'(r)-n^2a_n(r)=r^2\tilde{a}_n(r)$$

түрдегі біртекті емес Эйлер теңдеуі. Мұны тұрақтыны вариациялау әдісі арқылы шешеміз. Мұның сәйкес біртекті теңдеуінің жалпы шешімі

$$a_n(r)=C_nr^n+D_nr^{-n}$$

болғандықтан, жалпы шешімі

$$a_n(r)=C_n(r)\,r^n+D_n(r)\,r^{-n},\quad n=1,2,...$$

түрде ізделінеді. Мұндағы $C_n(r)$, $D_n(r)$ белгісіз функциялары

$$\begin{cases} r^{2n}C_n'(r)+D_n'(r)=0, \\ r^{2n}C_n'(r)-D_n'(r)=r^{n+3}\tilde{a}_n(r)/n \end{cases}$$

дифференциалдық теңдеулер жүйесінен кез келген E_n және F_n тұрақты сандарына дейінгі дәлдікпен анықталады.

Дәл осындай жолмен, $b_n(r)$ коэффициенттері де кез келген G_n, H_n тұрақты сандарына дейінгі дәлдікпен анықталады.

Бұл $a_0(r)$, $a_n(r)$, $b_n(r)$ коэффициенттерін (5.2.67) қатарға қойып, белгісіз еркін тұрақты сандары бар $u(r,\varphi)$ жалпы шешімді аламыз. Бұл белгісіз сандарды (5.2.64)-(5.2.65) шекаралық шарттарды пайдаланып анықтаймыз.

Мысал 5.2.5. *Сақинада қойылған Пуассон теңдеуі үшін үшінші шеттік есепті шешіңіз:*

$$\Delta u = r^3 \cos\varphi, \quad 1 < r < 2, \tag{5.2.74}$$

$$u|_{r=1} = \cos 2\varphi, \tag{5.2.75}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=2} = \sin 3\varphi. \tag{5.2.76}$$

Шешуі. Алдымен $f(r,\varphi) = r^3\cos\varphi$ функциясын (5.2.68) түрдегі Фурье қатарына жіктейміз. Бұл функцияның өзі Фурье қатары түрінде болғандықтан, Фурье коэффициенттері бірден анықталады, яғни

$$\tilde{a}_0(r) = 0,\ \ \tilde{a}_1(r) = r^3,\ \ \tilde{a}_n(r) = 0,\ \ n = 1, 2...,\ \ \tilde{b}_n(r) = 0,\ \ n = 0, 1, 2....$$

Жоғарыда айтылғандайын, шешімді

$$u(r,\varphi) = a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r)\cos\ n\varphi + b_n(r)\sin\ n\varphi \tag{5.2.77}$$

түрде іздейміз. Мұндағы $a_0(r)$, $a_n(r)$, $b_n(r)$ – коэффициенттері

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{da_0(r)}{dr}\right) = 0, \tag{5.2.78}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{da_1(r)}{dr}\right) - \frac{a_1(r)}{r^2} = r^3, \tag{5.2.79}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{da_n(r)}{dr}\right) - \frac{n^2 a_n(r)}{r^2} = 0, \quad n = 2, 3, ..., \tag{5.2.80}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{db_n(r)}{dr}\right) - \frac{n^2 b_n(r)}{r^2} = 0, \quad n = 1, 2, ... \tag{5.2.81}$$

теңдеулер жүйесінен анықталады.

(5.2.78) теңдеудің жалпы шешімі

$$a_0(r) = E_0 + F_0 \ln r,$$

мұндағы E_0, F_0 – белгісіз еркін тұрақтылар.

Ал, (5.2.79) теңдеудің жалпы шешімі

$$a_1(r) = C_1(r)\, r + D_1(r)\, r^{-1}$$

түрде ізделінеді. Мұндағы $C_1(r)$, $D_1(r)$ функциялары

$$\begin{cases} r^2 C_1'(r) + D_1'(r) = 0, \\ r^2 C_1'(r) - D_1'(r) = r^7 \end{cases}$$

дифференциалдық теңдеулер жүйесінен анықталады. Демек,

$$a_1(r) = \frac{r^7}{48} + E_1 r + F_1 r^{-1},$$

мұндағы E_1 және F_1 – кез келген тұрақты сандар.

(5.2.80), (5.2.81) теңдеулер біртекті болғандықтан, олардың сәйкес жалпы шешімдері

$$a_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}, \quad n = 2, 3, ...,$$

$$b_n(r) = G_n r^n + H_n r^{-n}, \quad n = 1, 2...,$$

мұндағы C_n, D_n, G_n, H_n – әзірге белгісіз еркін тұрақты сандар.

Демек, берілген есептің жалпы шешімі

$$\begin{aligned} u(r,\varphi) = a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r)\cos n\varphi + b_n(r)\sin n\varphi = \\ E_0 + F_0 \ln r + \left(\frac{r^7}{48} + E_1 r + F_1 r^{-1}\right)\cos\varphi + \\ + \sum_{n=2}^{\infty}\left(E_n r^n + F_n r^{-n}\right)\cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(G_n r^n + H_n r^{-n}\right)\sin n\varphi \end{aligned} \tag{5.2.82}$$

болады. Бұл белгісіз еркін тұрақтыларын анықтау үшін шекаралық шарттарды қолданамыз, яғни бірінші шекаралық шарт бойынша:

$$u(1,\varphi) = E_0 + \left(\frac{1}{48} + E_1 + F_1\right)\cos\ \varphi + \sum_{n=2}^{\infty}(E_n + F_n)\cos n\varphi + \\ \sum_{n=1}^{\infty}(G_n + H_n)\sin n\varphi = \cos\varphi,$$

екінші шарт бойынша

$$u_r'(2,\varphi)=\frac{F_0}{2}+\frac{28}{3}\cos\ \varphi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(nE_n2^{n-1}-nF_n2^{-n-1}\right)\cos n\varphi+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(nG_n2^{n-1}-nH_n2^{-n-1}\right)\sin n\varphi=\sin 3\varphi.$$

Бұлардан

$$E_0=0,\quad F_0=0,$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{48}+E_1+F_1=0\\[2ex] \dfrac{28}{3}+E_1-\dfrac{F_1}{4}=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}E_2+F_2=1,\\[2ex] 4E_2-\dfrac{1}{4}F_2=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}E_n+F_n=0\\[2ex] nE_n2^{n-1}-nF_n2^{-n-1}=0,\quad n=3,4,...,\end{cases}$$

$$\begin{cases}G_n+H_n=0\\[2ex] nG_n2^{n-1}-nH_n2^{-n-1}=0,\quad n\neq 3,\end{cases}\qquad \begin{cases}G_3+H_3=0\\[2ex] 12G_3-\dfrac{3}{16}H_3=1.\end{cases}$$

$$\begin{cases}G_3+H_3=0\\ 3G_32^2-3H_32^{-4}=1.\end{cases}$$

Бұл теңдеулер жүйесін шешіп, белгісіз тұрақтыларды анықтап, оларды (5.2.77) қойсақ, нәтижеде ізделінді шешімді аламыз:

$$u(r,\varphi)=\left(\frac{r^5}{24}-\frac{1793}{240}r+\frac{447}{60}r^{-1}\right)\cos\varphi+$$
$$\left(\frac{1}{17}r+\frac{16}{17}r^{-1}\right)\cos 2\varphi+\left(\tfrac{16}{195}r-\frac{16}{195}r^{-1}\right)\sin 3\varphi.$$

.

5.2.5. Жаттығулар

Жоғарыдағы әдістерді қолданып, келесі есептерді шешіңіз:

5.2.1. $\Delta u=0,\ \ 0\le r<R,\ \ 0\le\varphi\le 2\pi;\ \ u(R,\varphi)=\varphi\cdot(2\pi-\varphi)\,,\ \ 0\le\varphi\le 2\pi.$

5.2.2. $\Delta u(x,y)=0,\ \ x^2+y^2=r^2<4,\quad u|_{r=2}=x^3-2xy+1,\ \ u|_{r=0}<\infty.$

5.2.3. $\Delta u=0,\ r>R,\ 0<\varphi<2\pi,\ \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R}=\alpha\sin\frac{\varphi}{2},\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ |u|<\infty.$

Шеңбер ішінде немесе сыртында берілген төмендегі Нейман есебінің шешілу шартын тексеріп, шешімін анықтаңыз:

5.2.4. $\Delta u = 0,\ \ x^2 + y^2 = r^2,\ 0 < r < 1,\ \ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = 4(x^2 - y^2) + y.$

5.2.5. $\Delta u = 0,\ \ x^2 + y^2 = r^2,\ 0 < r < 1,\ \ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = Ay^2 - B.$

5.2.6. $\Delta u(x,y) = 0,\ \ x^2 + y^2 = r^2 < R^2,\ \ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = \left. 4x^2 - Ay^2 + y\right|_{r=R}.$

5.2.7. $\Delta u(x,y) = 0,\ \ x^2 + y^2 = r^2 < R^2,\ \ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = \left. \alpha x + \beta y + \gamma\right|_{r=R}.$

5.2.8. $\Delta u(x,y) = 0,\ \ x^2 + y^2 = r^2 < R^2,\ \ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = \left. \alpha x^2 + \beta xy + \gamma\right|_{r=R}.$

5.2.9. $\Delta u = 0,\ \ 0 < r < R,\ \ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = A\cos\varphi.$

Келесі сақинада берілген Дирихле есебін шешіңіз:

5.2.10. $\begin{cases} \Delta u\,(r,\varphi) = 0, \quad 1 < r < 2,\ 0 < \varphi < 2\pi, \\ u\,(1,\varphi) = v_1 = const,\ \ u\,(2,\varphi) = v_2 = const,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$

5.2.11. $\begin{cases} \Delta u\,(r,\varphi) = 0, \quad 1 < r < 2,\ 0 < \varphi < 2\pi, \\ u\,(1,\varphi) = 1 + \cos^2\varphi,\ \ u\,(2,\varphi) = \sin^2\varphi,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$

5.2.12. $\begin{cases} \Delta u\,(r,\varphi) = 0, \quad a < r < b,\ 0 < \varphi < 2\pi, \\ u\,(a,\varphi) = 0,\ \ u\,(b,\varphi) = A\cos\varphi,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$

5.2.13. $\Delta u\,(x,y) = 0, \quad 1 < r = \sqrt{x^2 + y^2} < 3, \quad u|_{r=1} = 0,\ \ u|_{r=3} = 3x.$

5.2.14. $x^2 + y^2 = r^2 < R^2$ *шеңбері ішінде* $\Delta u(x,y) = -Axy,\ \ A = const$ *Пуассон теңдеуінің шешімін табыңыз, егер* $u|_{r=R} = 0$ *болса.*

5.2.15. $\Delta u\,(x,y) = 0, \quad 1 < r = \sqrt{x^2 + y^2} < 2, \quad u|_{r=1} = 1,\ \ u|_{r=2} = 2xy.$

5.2.6. Жауаптары

5.2.1. $u\,(r,\varphi) = \dfrac{2\pi^2}{3} - 4\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}\left(\dfrac{r}{R}\right)^k \cos k\varphi.$

5.2.2. $u\,(x,y) = 1 + 3x - 2xy + \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}xy^2.$

5.2.3. $u\,(r,\varphi) = \dfrac{2\alpha}{\pi} - \dfrac{4\alpha}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{4k^2 - 1}\left(\dfrac{R}{r}\right)^k \cos k\varphi.$

5.2.4. *Шешілу шарты орындалады,* $u\,(x,y) = 2(x^2 - y^2) + y + C,\ C = const.$

5.2.5. *Шешілу шарты* $A = 2B$ *болса орындалады,*
$u\,(x,y) = \frac{A}{4}(y^2 - x^2) + C,\ C = const.$

5.2.6. *Шешілу шарты* $A = 4$ *болса орындалады,*
$u = 2R^2(x^2 - y^2) + Ry + C,\ \ C = const.$

5.2.7. *Шешілу шарты* $\gamma = 0, \forall\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ *болса орындалады,*
$u = \alpha x + \beta y + C,\ \ C = const.$

5.2.8. *Шешілу шарты* $\gamma = -\dfrac{\alpha R^2}{2}, \forall\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ *болса орындалады,*
$u = \frac{\alpha R}{4}(x^2 - y^2) + \frac{\beta R}{2}xy + C,\ \ C = const.$

5.2.9. *Шешілу шарты орындалады,* $u = Ar\cos\varphi + C,\ C = const.$

5.2.10. $u = v_1 + (v_2 - v_1)\dfrac{\ln r}{\ln 2}.$

5.2.11. $\dfrac{3}{2} - \dfrac{\ln r}{\ln 2} + \left(\dfrac{2}{3r^2} - \dfrac{1}{6}r^2\right)\cos 2\varphi.$

5.2.12. $u = A\dfrac{b\left(r^2 - a^2\right)}{r\left(b^2 - a^2\right)}\cos\varphi.$

5.2.13. $u(x,y) = \dfrac{27(x^2 + y^2 - 1)}{8(x^2 + y^2)}x.$

5.2.14. $u = \frac{Ar^2}{24}\left(R^2 - r^2\right)\sin 2\varphi.$ *Нұсқау:* $u = v + \omega,$ *мұндағы* $v = -\frac{Axy}{12}\left(x^2 + y^2\right) = -\frac{Ar^4}{24}\sin 2\varphi -$ *Пуассон теңдеуінің дербес шешімі, ал* $\omega -$ *Лаплас теңдеуінің* $\omega|_{r=R} = \frac{A}{24}R^4\sin 2\varphi$ *шекаралық шартын қанағаттандыратын шешімі.*

5.2.15. $u(x,y) = \dfrac{\ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}}{\ln\frac{1}{2}} + \dfrac{32((x^2 + y^2)^2 - 1)}{15(x^2 + y^2)^2}xy.$

5.3 Грин функциясы әдісі

Бұл бөлімде арнайы облыстарда қойылған Лаплас немесе Пуассон теңдеулері үшін шеттік есептерді шешудің тағы бір әдісі – Грин функциясы әдісі қарастырылады. Электростатикалық кескін әдісі арқылы дербес жағдайдағы облыстар үшін Грин функциясын құру көрсетіледі.

5.3.1. Лаплас теңдеуіне қойылған Дирихле есебі үшін Грин функциясы. Грин функциясы әдісі

n өлшемді $\mathbb{R}^n$ Евклид кеңістігіндегі тегіс $S = \partial\Omega$ шекаралы Ω облысында қойылған Лаплас теңдеуі үшін Дирихле есебін қарастырайық, яғни

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0, \quad x \in \Omega, \\ \\ u(x)\big|_{x\in S} = \varphi(x), \quad x \in S, \end{cases} \tag{5.3.83}$$

теңдеулер жүйесін қанағаттандыратын $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ функциясын табу керек, мұндағы $\varphi(x) \in C(S)$ – берілген үзіліссіз функция.

Жоғарыдағы айтылған Лаплас теңдеуінің іргелі шешімін еске түсірейік ((5.1.14) қараңыз):

$$E(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{|\xi - x|}, \quad n = 2, \\ \dfrac{1}{4\pi|\xi - x|}, \; n = 3. \end{cases} \tag{5.3.84}$$

Анықтама 5.3.1. Ω *облысында:*

1. $$G(x,\xi) = E(x,\xi) + g(x,\xi), \tag{5.3.85}$$

яғни $E(x,\xi)$ – Лаплас теңдеуінің іргелі шешімі мен Ω облысының барлық жерінде гармониялық $g(x,\xi)$ функцияның қосындысынан тұратын және шекарада

2. $$G(x,\xi)\big|_S = 0 \tag{5.3.86}$$

шартын қанағаттандыратын $G(x,\xi), \;\; x \neq \xi \in \overline{\Omega}$ функциясы Лаплас теңдеуі үшін Дирихле есебінің Грин функциясы деп аталады.

Грин функциясының қасиеттері. Лаплас теңдеуі үшін Дирихле есебінің $G(x,\xi)$ Грин функциясы келесі қасиеттерге ие:

1°. $G(x,\xi) \geq 0, \quad x \neq \xi \in \Omega,$

2°. $\Delta_x G(x,\xi) = \Delta_\xi G(\xi,x) = 0, \quad x \neq \xi \in \Omega,$

3°. $G(x,\xi) = G(\xi,x), \quad x \neq \xi \in \overline{\Omega}.$

Егер Грин функциясы белгілі болса, онда Лаплас және Пуассон теңдеулері үшін Дирихле есебін оңай шешуге болады.

Теорема 5.3.1. *Егер* $G(x,\xi)$ (5.3.83) *Дирихле есебінің Грин функциясы болса, онда* (5.3.83) *есептің шешімі*

$$u(x) = -\int\limits_S \varphi(\xi)\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \vec{n}_\xi}dS_\xi \tag{5.3.87}$$

түрде өрнектеледі, мұндағы $\dfrac{\partial}{\partial \vec{n}_\xi}$ – $\xi \in S$ *нүктедегі* S *бетіне тұрғызылған сыртқы нормал бойынша туынды, ал* dS_ξ – ξ *нүктедегі* S *беті ауданының элементі.*

Дәлелдеуі. Жоғарыдығы (5.1.16)-Гриннің екінші формуласын осы $u(x)$ және $g(x,y)$ функциялары үшін қолданайық:

$$\int\limits_\Omega \left(g\left(x,y\right)\Delta u(x) - u(x)\Delta g\left(x,y\right)\right)dx = \int\limits_S \left(g\left(\xi,y\right)\frac{\partial u(\xi)}{\partial \vec{n}_\xi} - u(\xi)\frac{\partial g(\xi,y)}{\partial \vec{n}_\xi}\right)dS_\xi.$$

Бұдан $\Delta u(x) = 0, \quad \Delta g\left(x,y\right) = 0$ болғандықтан,

$$\int\limits_S \left(g\left(\xi,y\right)\frac{\partial u(\xi)}{\partial \vec{n}_\xi} - u(\xi)\frac{\partial g(\xi,y)}{\partial \vec{n}_\xi}\right)dS_\xi = 0. \tag{5.3.88}$$

Енді гармоникалық функцияның интеграл арқылы өрнектелу формуласын жазайық ((5.1.21) қараңыз):

$$u\left(x\right) = \int\limits_S \left(E(x,\xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial \vec{n}_\xi} - u\left(\xi\right)\frac{\partial E(x,\xi)}{\partial \vec{n}_\xi}\right)dS_\xi. \tag{5.3.89}$$

Егер Грин функциясының анықтамасындағы (5.3.85)

$$G(x,\xi) = E(x,\xi) + g(x,\xi)$$

теңдігін ескеріп, (5.3.88) және (5.3.89) теңдіктерді қоссақ, онда

$$u\left(x\right) = \int\limits_S \left(G(x,\xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial \vec{n}_\xi} - u\left(\xi\right)\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \vec{n}_\xi}\right)dS_\xi.$$

Бұған $u(\xi) = \varphi\left(\xi\right), \quad \xi \in S$ және Грин функциясының анықтамасындағы $G(x,\xi) = 0, \quad \xi \in S$ шекаралық шарттарын қолдансақ, нәтижеде

$$u(x) = -\int\limits_S \varphi(\xi)\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \vec{n}_\xi}dS_\xi$$

теңдікті аламыз.

Теорема 5.3.2. *Егер $G(x, \xi)$ (5.3.83) Дирихле есебінің Грин функциясы болса, онда*

$$\Delta u(x) = -F(x), \quad x \in \Omega, \qquad u(x)|_S = f(y)|_{y \in S}$$

Пуассон есебінің шешімі

$$u(x) = -\int\limits_S f(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y} dS_y + \int\limits_\Omega F(y) G(x,y) dy \tag{5.3.90}$$

түрде өрнектеледі, мұндағы ω_n – бірлік сфера бетінің ауданы.

Ескерту 5.3.1. *Бұл тұжырымнан, Лаплас немесе Пуассон теңдеуі үшін Дирихле есебін шешу үшін $G(x, \xi) = E(x, \xi) + g(x, \xi)$ Грин функциясын құру жеткілікті екендігін көреміз. Алайда $E(x, \xi)$ Лаплас теңдеуінің іргелі шешімі белгілі болғандықтан Грин функциясын құру $g(x, \xi)$ гармоникалық функциясын табуға келеді. Жоғарыдағы Грин функциясының анықтамасы және екінші қасиеті бойынша, $g(x, \xi)$ функциясы*

$$\Delta_x g(x, \xi) = \Delta_\xi g(x, \xi) = 0, \quad x, \ \xi \in \Omega, \tag{5.3.91}$$

$$g(x, \xi)|_{x \in S} = -E(x, \xi)|_{x \in S} \tag{5.3.92}$$

шеттік есебінің шешімі болады. Бұл да Дирихле есебі, бірақ шекаралық мәні кез келген емес арнайы түрдегі функция.

5.3.2. Грин функциясын құру. Электростатикалық кескін әдісі

Шекарасы жазықтық немесе сфера болып келетін облыстарда Грин функциясы айқын түрде құрылады. Грин функциясын физикалық интерпретациясы бойынша *электростатикалық кескін* әдісі және математикалық түрде *конформдық бейнелеу* әдісі арқылы құруға болады.

Электростатикалық кескін әдісін $n = 3$ өлшемді жағдай үшін қарастырайық. Анықтама бойынша Грин функциясы:

$$G(x, \xi) = \frac{1}{4\pi |x - \xi|} + g(x, \xi). \tag{5.3.93}$$

Жалпы физика курсынан белгілі, ξ нүктеге жайғастырылған шамасы q-ге тең электрлік заряд шексіз кеңістікте белгілі бір координат жүйесінде потенциалы

$$\frac{q}{4\pi |x - \xi|} \tag{5.3.94}$$

болатын электростатикалық өрісті тудырады. Бұл (5.3.94) потенциал ξ нүктесінен басқа барлық жерде гармоникалық функция болатынын көруге болады, яғни Лаплас теңдеуінің іргелі шешімі болады ((5.1.14) қараңыз). Сондықтан (5.3.93) өрнектегі $E(x,\xi) = \frac{1}{4\pi|x-\xi|}$ бірінші қосылғышты ξ нүктеге жайғастырылған $q = 1$ оң бірлік нүктелік зарядтың потенциалы, ал екінші қосылғыш – $g(x,\xi)$ функциясын Ω облысының сыртындағы $\xi^k \notin \overline{\Omega}$ нүктелерде орналасқан $q_k,\ k = 1, 2, ...m$ нүктелік зарядтары тудырған электростатикалық өріс потенциалы ретінде қарастыруға болады, яғни

$$g\left(x,\xi\right) = \frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{m}\frac{q_k}{|x-\xi^k|}, \quad \xi^k \notin \overline{\Omega}. \tag{5.3.95}$$

Себебі, жоғарыда айтылғандайын, нүктелік зарядтар тудырған электростатикалық өріс потенциалы ξ^k нүктелерден басқа жерлерде гармоникалық функция болады.

Бұл Ω облысының сыртындағы $q_k,\ k = 1, 2, ...m$ зарядтары қосынды өріс потенциалы шекарада нөлге айналатындай, яғни

$$G\left(y,\xi\right) = 0, \quad y \in \partial\Omega$$

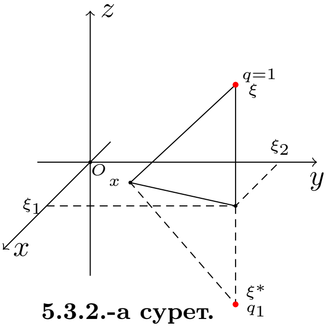
шарты орындалатындай таңдап алынады. q_k зарядтары $q = 1$ бірлік зарядының ***электростатикалық бейнесі*** деп аталады. Мұндай физикалық тұрғыда Грин функциясын құру ***электростатикалық әдіс*** деп аталады. Бұл әдіс бойынша Грин функциясын құру үшін әуелі $q_k,\ k = 1, 2, ...m$ зарядтары мен $\xi^k \notin \overline{\Omega}$ нүктелерін таңдай білу қажет. Мәселен, шекарасы жазықтық болып келетін облыстар үшін ξ^k нүктелері ретінде ξ нүктесінің Ω облысын шектейтін әрбір жазықтықтарға қатысты айналық бейнелері алынады. Егер Ω сфера түрдегі облыс болса, онда сфера бойынша инверсия түрлендіруі қолданылады.

1. Жарты кеңістікте Грин функциясын құру. Грин функциясын құру арқылы $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3),\ x_1, x_2 \in R,\ x_3 \geq 0\}$ жарты кеңістігінде

$$\Delta u(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad x_1, x_2 \in R,\ x_3 > 0,$$

$$u(x_1, x_2, x_3)|_{x_3=0} = \varphi\left(x_1, x_2\right),\ x_1, x_2 \in R$$

Дирихле есебінің шешімін табуды қарастырайық.



5.3.2.-а сурет.

Жоғарыдағы әдіс бойынша, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \Omega$ нүктесіне оң $q = 1$ бірлік зарядын орналастырамыз. ξ нүктесінің $S = \{x_3 = 0\}$ жазықтығына қатысты айналы симметриялы $\xi^* = (\xi_1, \xi_2, -\xi_3)$ нүктесіне q_1 зарядын орналастырсақ, онда $q = 1$ және q_1 зарядтары тудырған қосынды өріс потенциалы, яғни Грин функциясы

$$G(x,\xi) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|x-\xi|} + \frac{q_1}{|x-\xi^*|}\right) \tag{5.3.96}$$

түрде болады. Мұндағы q_1 шамасын

$$G\left(x,\xi\right)\big|_{x_3=0} = 0$$

шарты орындалатындай таңдап аламыз, яғни (5.3.96) өрнектен

$$q_1 = -\left.\frac{|x-\xi^*|}{|x-\xi|}\right|_{x_3=0} = -\left.\frac{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3+\xi_3)^2}}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2}}\right|_{x_3=0} = -1.$$

Демек, Грин функциясы

$$G(x,\xi) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|x-\xi|} - \frac{1}{|x-\xi^*|}\right).$$

Енді (5.3.87) формуланы қолданып, есептің шешімін жазамыз. Ол үшін алдымен Грин функциясының нормал туындысын, яғни біздің жағдайда S бетке тұрғызылған сыртқы нормалдың бағыты x_3 өсінің оң бағытына қарама-қарсы болқандықтан $\dfrac{\partial G(y,\xi)}{\partial n_y} = -\dfrac{\partial G(x,\xi)}{\partial x_3}$ туындыны табу қажет:

$$\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x_3} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{1}{|x-\xi|} - \frac{1}{|x-\xi^*|}\right) =$$
$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\left[(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2\right]^{-\frac{1}{2}} - \right.$$
$$\left.\left[(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3+\xi_3)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\right) =$$
$$-\frac{1}{4\pi}\left[\frac{x_3-\xi_3}{\left[(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \right.$$
$$\left.\frac{x_3+\xi_3}{\left[(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3+\xi_3)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right].$$

$S = \{x_3 = 0\}$ шекарадағы мәні

$$\left.\frac{\partial G(y,\xi)}{\partial n_y}\right|_{x_3=0} = -\left.\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x_3}\right|_{x_3=0} = -\frac{\xi_3}{2\pi\left[(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+\xi_3^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Олай болса, (5.3.87) бойынша Дирихле есебінің шешімі

$$u(\xi) = \frac{\xi_3}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi\left(x_1, x_2\right) dx_1 dx_2}{\left[\left(x_1 - \xi_1\right)^2 + \left(x_2 - \xi_2\right)^2 + \xi_3^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \tag{5.3.97}$$

Жалпы жағдайда $g(x, \xi)$ функциясын

$$g(x, \xi) = -\sum_{k=1}^{m} E\left(q_k x, q_k \xi^k\right) \tag{5.3.98}$$

түрде іздеуге болады. Мұндағы $E(x, \xi)$ – Лаплас теңдеуінің іргелі шешімі, q_k – Ω облысын шектейтін k-шы жазықтық бойынша ξ нүктесінің айналық кескіні. Бұл q_k шамалары

$$g(x, \xi)|_{x \in S} = -E(x, \xi)|_{x \in S} \tag{5.3.99}$$

шарты орындалатындай таңдап алынады. Мәселен, кеңістік өлшемі $n = 2$ болса, онда Грин функциясы (5.3.84), (5.3.98) бойынша

$$G(x, \xi) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - \xi|} + g(x, \xi)$$

түрде құрылады. Мұндағы $g(x, \xi)$ функциясы

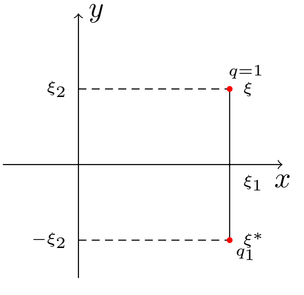
$$g\left(x, \xi\right) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{m} \ln \frac{1}{q_k \left|x - \xi^k\right|}$$

түрде ізделінеді.

2. Жарты жазықтықта Грин функциясын құру. $\Omega = \left\{\left(x_1, x_2\right),\ x_1 \in R,\ x_2 \geq 0\right\}$ жарты жазықтығында Грин функциясын құрып, келесі Дирихле есебінің шешімін табуды қарастырайық:

$$\Delta u(x_1, x_2) = 0, \quad x_1 \in R,\ x_2 > 0,$$

$$u(x_1, x_2)|_{x_2 = 0} = \varphi\left(x_1\right),\ \ x_1 \in R.$$



5.3.2-ә сурет.

$\xi=(\xi_1,\xi_2)\,,\;\;\xi_2>0$ нүктесіне оң $q=1$ бірлік зарядын орналастырамыз. ξ нүктесіне $S=\{x_2=0\}$ түзуіне қатысты симметриялы нүкте $\xi^*=(\xi_1,-\xi_2)$

$$g(x,\xi)=-E\left(qx,q\xi^*\right)=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{q\left|x-\xi^*\right|}$$

(5.3.99) шарт бойынша

$$g(x,\xi)|_{x_2=0}=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{q\left|x-\xi^*\right|}\bigg|_{x_2=0}=-\,\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x-\xi|}\bigg|_{x_2=0}.$$

Бұдан

$$q=\left.\frac{|x-\xi|}{|x-\xi^*|}\right|_{x_2=0}=\left.\frac{\sqrt{\left(x_1-\xi_1\right)^2+\left(x_2-\xi_2\right)^2}}{\sqrt{\left(x_1-\xi_1\right)^2+\left(x_2+\xi_2\right)^2}}\right|_{x_2=0}=1.$$

Демек, Грин функциясы

$$G(x,\xi)=E(x,\xi)+g(x,\xi)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x-\xi|}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x-\xi^*|}.$$

Ал нормал туынды

$$\frac{\partial G(y,\xi)}{\partial n_y}=-\,\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x_2}=-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\ln\frac{1}{|x-\xi|}-\ln\frac{1}{|x-\xi^*|}\right)=$$

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\ln\left[\left(x_1-\xi_1\right)^2+\left(x_2-\xi_2\right)^2\right]-\ln\left[\left(x_1-\xi_1\right)^2+\left(x_2+\xi_2\right)^2\right]\right)=$$

$$\frac{1}{2\pi}\left[\frac{x_2-\xi_2}{\left(x_1-\xi_1\right)^2+\left(x_2-\xi_2\right)^2}-\frac{x_2+\xi_2}{\left(x_1-\xi_1\right)^2+\left(x_2+\xi_2\right)^2}\right].$$

$S=\{x_2=0\}$ шекарада

$$\left.\frac{\partial G(y,\xi)}{\partial n_y}\right|_{x_2=0}=-\left.\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x_2}\right|_{x_2=0}=-\frac{1}{\pi}\frac{\xi_2}{\left(x_1-\xi_1\right)^2+\xi_2^2}.$$

Олай болса, (5.3.87) бойынша Дирихле есебінің шешімі

$$u(\xi)=\frac{\xi_2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi\left(x_1\right)}{\left(x_1-\xi_1\right)^2+\xi_2^2}dx_1. \tag{5.3.100}$$

3. Шар үшін Грин функциясы. Грин функциясы әдісі арқылы $\Omega = \left\{x = (x_1, x_2, x_3): \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < R^2\right\}$ шар ішінде

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega,$$

Лаплас теңдеуін және $\partial\Omega = \left\{x = (x_1, x_2, x_3): \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\right\}$ сферада (шекарасында)

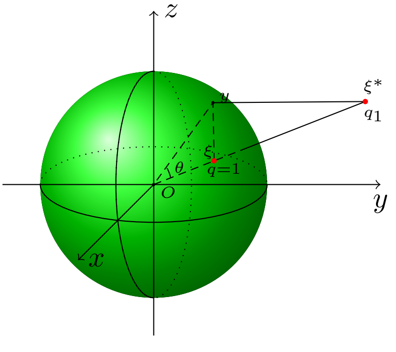
$$u(x)|_{\partial\Omega} = \varphi(y), \quad y \in \partial\Omega$$

шекаралық шартын қанағаттандыратын $u(x)$ функциясын табу есебін қарастырайық.

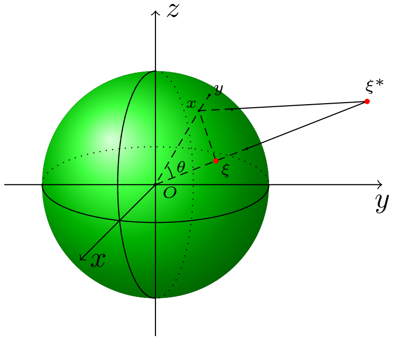
$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \Omega$ нүктесіне оң $q = 1$ бірлік зарядын орналастырамыз. Осы ξ нүктесінің $|x| = R$ сферасына қатысты инверция бойынша анықталатын $\xi^* = \frac{R^2}{|\xi|^2}\xi$ нүктесін аламыз, яғни ξ және ξ^* нүктелері шар центрінен шығатын бір түзудің бойында жатады және

$$|\xi| \cdot |\xi^*| = R^2 \tag{5.3.101}$$

теңдігі орындалады.



5.3.2-б сурет.



5.3.2-в сурет.

Осы нүктеге q_1 зарядын орналастырсақ, онда $q = 1$ және q_1 зарядтары тудырған қосынды өріс потенциалы, яғни Грин функциясы

$$G(x, \xi) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|x - \xi|} - \frac{1}{q_1\,|x - \xi^*|}\right) \tag{5.3.102}$$

түрде ((5.3.98) бойынша $g(x, \xi) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{q_1|x-\xi^*|}$ түрде ізделінеді) болады. Мұндағы q_1 шамасын шекарада

$$G(y, \xi) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|y - \xi|} - \frac{1}{q_1\,|y - \xi^*|}\right) = 0, \quad y \in \partial\Omega$$

шарты орындалатындай таңдап аламыз, яғни бұл өрнектен

$$q_1 = \frac{|y - \xi|}{|y - \xi^*|}, \quad y \in \partial\Omega. \tag{5.3.103}$$

Мұндағы ξ – облыстың ішкі, ал y – шекарадағы кез келген тұрақтандырылған нүкте. Енді (5.3.103) теңдіктің оң жағы тұрақты екендігін көрсетейік.

Шындығында, $\triangle yO\xi \sim \triangle yO\xi^*$ ұқсас үшбұрыштар, себебі (5.3.2-б сурет) O төбесіндегі θ бұрышы ортақ және осы бұрышты құрайтын қабырғалары (5.3.101) бойынша пропорционал. Олай болса, үшбұрыштардың ұқсастығынан қалған қабырғаларының пропорционалдығын аламыз:

$$\frac{|y-\xi|}{|y-\xi^*|} = \frac{|\xi|}{R}, \tag{5.3.104}$$

мұнда $|\xi| = |O\xi|$ және $\frac{|\xi|}{R} = const.$ (5.3.103), (5.3.104) теңдіктерді ескеріп, (5.3.102) теңдіктен

$$G(x,\xi) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|x-\xi|} - \frac{R}{|\xi|}\frac{1}{|x-\xi^*|}\right)$$

Грин функциясын аламыз.

Енді шешімді табу үшін Грин функциясының нормал туындысын есептеу қажет. Айталық, $x \in \Omega$ кез келген айнымалы ішкі нүкте болсын және $|x| = r$ белгілейік (5.3.2-в сурет). Мұнда сфераға тұрғызылған сыртқы нормалдың бағыты радиус бағытымен бағыттас болады. Сондықтан егер $x \in \vec{n}_y$ болса, онда

$$|x-\xi|^2 = r^2 + |\xi|^2 - 2r\,|\xi|\cos\theta,\; |x-\xi^*|^2 = r^2 + |\xi^*|^2 - 2r\,|\xi^*|\cos\theta.$$

Олай болса,

$$\frac{\partial G(y,\xi)}{\partial n_y} = \left.\frac{\partial G}{\partial r}\right|_{r=R} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(r^2 + |\xi|^2 - 2r\,|\xi|\cos\theta\right)^{-1/2} - \right.$$

$$\left.\frac{R}{|\xi|}\left(r^2 + \left(\frac{R^2}{|\xi|}\right)^2 - 2r\frac{R^2}{|\xi|}\cos\theta\right)^{-1/2}\right]_{r=R} =$$

$$-\frac{1}{4\pi}\left[\frac{R-|\xi|\cos\theta}{\left(R^2+|\xi|^2-2R\,|\xi|\cos\theta\right)^{3/2}} - \frac{R}{|\xi|}\frac{R-\frac{R^2}{|\xi|}\cos\theta}{\left(R^2+\left(\frac{R^2}{|\xi|}\right)^2-2R\frac{R^2}{|\xi|}\cos\theta\right)^{3/2}}\right] =$$

$$-\frac{1}{4\pi R}\frac{R^2-|\xi|^2}{\left(R^2+|\xi|^2-2R\,|\xi|\cos\theta\right)^{3/2}}.$$

Егер $x = y$ кезде

$$R^2 + |\xi|^2 - 2R\,|\xi|\cos\theta = |y-\xi|^2$$

екендігін ескерсек, онда

$$\frac{\partial G(y,\xi)}{\partial n_y} = -\frac{1}{4\pi R}\frac{R^2-|\xi|^2}{|y-\xi|^3}.$$

Демек, (5.3.87) бойынша есептің шешімі

$$u(\xi) = \frac{1}{4\pi R} \int\limits_{|x|=R} \frac{R^2 - |\xi|^2}{|y-\xi|^3} \varphi(y) ds_y. \tag{5.3.105}$$

(5.3.105) формула Пуассон формуласы деп аталады, оң жағындағы интеграл Пуассон интегралы, ал $\frac{R^2-|\xi|^2}{|y-\xi|^3}$ оның ядросы деп аталады.

Егер жоғарыдағы есеп Пауссон теңдеуі үшін қойылса, яғни

$$\begin{cases} \Delta u(x) = -f(x), & x \in \Omega, \\ u(y) = \varphi(y), & y \in \partial\Omega \end{cases}$$

болса, шешім (5.3.90) бойынша

$$u(\xi) = \frac{1}{4\pi R} \int\limits_{|x|=R} \frac{R^2 - |\xi|^2}{|y-\xi|^3} \varphi(y) ds_y + \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|x| \le R} \left(\frac{1}{|x-\xi|} - \frac{R}{|\xi|} \frac{1}{|x-\xi^*|} \right) f(x) dx$$

болады.

Мысал 5.3.1. $\Omega = \{(x,y):\ y > 0,\ -\infty < x < \infty\}$ *жарты жазықтығында гармоникалық* $u\,(x,y)$ *функциясын анықтаңыз, егер ол функция үшін* $u\,(x,0) = \frac{x}{x^2+1}$ *ақпараты мәлім болса.*

Шешуі. (5.3.100) бойынша шешім

$$u\,(x,y) = \frac{y}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi}{(1+\xi^2)\left[(\xi - x)^2 + y^2\right]} d\xi$$

интегралы арқылы есептелінеді. Бұл интегралды есептеу үшін шегерімдер теориясын[5] қолданған тиімдірек болады, яғни

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi}{(1+\xi^2)\left[(\xi - x)^2 + y^2\right]} d\xi = 2\pi i \left[res\, f\,(i) + res\, f\,(x+iy)\right],$$

$$f\,(z) = \frac{z}{(1+z^2)\left[(z-x)^2 + y^2\right]}.$$

Мұндағы

$$\mathrm{res} f\,(i) = \frac{1}{2\left[(i-x)^2 + y^2\right]}, \quad \mathrm{res} f\,(x+iy) = \frac{x+iy}{2iy\left[1 + (x+iy)^2\right]}$$

[5] Комплекс айнымалы функциялар теориясы пәнін қараңыз.

болғандықтан,

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi}{(1+\xi^2)\left[(\xi-x)^2+y^2\right]}d\xi=\frac{iy}{(i-x)^2+y^2}+\frac{x+iy}{1+(x+iy)^2}=$$

$$\frac{iy}{[(i-x)+iy]\,[(i-x)-iy]}+\frac{x+iy}{(x+iy-i)\,(x+iy+i)}=$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{i-x-iy}-\frac{1}{i-x+iy}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x+iy-i}+\frac{1}{x+iy+i}\right]=$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{i(1-y)-x}-\frac{1}{i(1+y)-x}+\frac{1}{x+i(y-1)}+\frac{1}{x+i(y+1)}\right]=$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{i(1+y)+x}-\frac{1}{i(1+y)-x}\right]=\frac{x}{x^2+(x+y)^2}.$$

Жауабы: $u(x,y)=\dfrac{x}{x^2+(x+y)^2}.$

Мысал 5.3.2. $\Omega=\{(x,y,z):\ -\infty<x,y<\infty,\ z>0\}$ *жарты кеңістігінде келесі Дирихле есебін шешіңіз:*

$$\begin{cases}\Delta u=0,\ (x,y,z)\in\Omega,\\ u|_{z=0}=\cos x\cos y,\quad x,y\in R^2.\end{cases}$$

Шешуі. (5.3.97) формула бойынша шешім

$$u(x,y,z)=\frac{z}{2\pi}\iint\limits_{R^2}\frac{\cos\xi\cos\eta d\xi d\eta}{\left[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+z^2\right]^{3/2}}$$

интегралы арқылы есептелінеді.

Бұл интегралды есептеу үшін $\xi-x=u,\ \eta-y=v$ белгілеу енгіземіз, мұнда якобиан бірге тең.

$$u(x,y,z)=\frac{z}{2\pi}\iint\limits_{R^2}\frac{\cos(u+x)\cos(v+y)\,dudv}{[u^2+v^2+z^2]^{3/2}}=$$

$$\frac{z}{2\pi}\iint\limits_{R^2}\frac{(\cos u\cos x-\sin u\sin x)(\cos v\cos y-\sin v\sin y)\,dudv}{[u^2+v^2+z^2]^{3/2}}=$$

$$\frac{z}{2\pi}\cos x\cos y\iint\limits_{R^2}\frac{\cos u\cos vdudv}{[u^2+v^2+z^2]^{3/2}}.$$

Мұнда қалған интегралдар интеграл астында тақ функциялар болғандықтан нөлге айналды. Енді соңғы интегралды есептейік:

$$J=\iint\limits_{R^2}\frac{\cos u\cos v du dv}{\left[u^2+v^2+z^2\right]^{3/2}}=\iint\limits_{R^2}\frac{\cos(u+v)+\sin u\sin v}{\left[u^2+v^2+z^2\right]^{3/2}}dudv=$$

$$\iint\limits_{R^2}\frac{\cos(u+v)dudv}{\left[u^2+v^2+z^2\right]^{3/2}}=\left|\begin{array}{l} p=\frac{1}{\sqrt{2}}(u+v),\\ q=\frac{1}{\sqrt{2}}(u-v)\end{array}\right|=\iint\limits_{R^2}\frac{\cos\left(\sqrt{2}p\right)}{\left[p^2+q^2+z^2\right]^{3/2}}dpdq=$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos\left(\sqrt{2}p\right)dp\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dq}{\left[p^2+q^2+z^2\right]^{3/2}}.$$

$$J_1=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dq}{\left[p^2+q^2+z^2\right]^{3/2}}=\left|q=\sqrt{p^2+z^2}tgt\right|=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{|\cos t|}{p^2+z^2}dt=\frac{2}{p^2+z^2}.$$

Олай болса,

$$J=2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\left(\sqrt{2}p\right)}{p^2+z^2}dp=2Re\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\sqrt{2}p}}{p^2+z^2}dp=$$

$$4\pi i\, res\,\frac{e^{i\sqrt{2}p}}{p^2+z^2}\bigg|_{p=zi}=4\pi i\,\frac{e^{-\sqrt{2}z}}{2zi}=\frac{2\pi}{z}e^{-\sqrt{2}z}.$$

Демек,

$$u\left(x,y,z\right)=e^{-\sqrt{2}z}\cos x\cos y.$$

5.3.3. Потенциалдар теориясынан қысқаша түсініктер

Айталық, $\Omega \in R^n$ – шенелген тегіс $S = \partial\Omega$ шекаралы облыс, $\Omega^+ \equiv \Omega$, $\Omega^- \equiv R^n \backslash \bar{\Omega}$, ал $\mu(x) \in C(\Omega)$ үзіліссіз функция болсын.

Анықтама 5.3.2. *Шенелген Ω облыстағы тығыздығы $\mu(x) \in C(\Omega)$ үзіліссіз функциясы болатын көлемдік потенциал (көлемдік массалар потенциалы) деп*

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} E(x,\xi)\mu(\xi)d\xi \tag{5.3.106}$$

функциясын айтамыз. Мұндағы $E(x,\xi)$ Лаплас теңдеуінің іргелі шешімі.

Анықтама 5.3.3. *Шенелген Ω облыстағы тығыздығы $\mu(x) \in C(\Omega)$ үзіліссіз функциясы болатын ньютондық көлемдік потенциал деп*

$$u_N(x) = \int\limits_{\Omega} E_N(x,\xi)\mu(\xi)d\xi \tag{5.3.107}$$

функциясын айтамыз. Мұндағы $E_N(x,\xi) = -\omega_n E(x,\xi)$.

Ескерту 5.3.2. *Көлемдік потенциалдың физикалық мағынасы.*

Үш өлшемді жағдайда: тығыздығы $\mu(\xi)$ болатын зарядталған Ω дененің тудырған электр өрісінің потенциалы немесе массалар тығыздығы $\mu(\xi)$ болатын Ω дененің тудырған гравитациялық өріс потенциалы.

Екі өлшемді жағдайда: зарядтар тығыздығы $\mu(\xi_1,\xi_1)$, қимасы Ω болатын, ξ_3 өсі бойыдағы шексіз ұзын зарядталған цилиндрдің тудырған электр өрісінің потенциалы немесе массалар тығыздығы $\mu(\xi_1,\xi_1)$ болатын осы цилиндрдің тудырған гравитациялық өріс потенциалы.

Көлемдік потенциалдардың негізгі қасиеттері.

1. Айталық, $\Omega \in R^n$ – құрақты-тегіс шекаралы шенелген кеңістіктегі облыс, ал $\mu(x) \in C^1(\Omega)\bigcap C(\bar{\Omega})$ функция болсын. Онда (5.3.106) көлемдік потенциал келесі асимтотикалық мінезде болады:

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = \begin{cases} \infty, \quad n=2, \quad \text{егер} \displaystyle\int\limits_{\Omega} \mu(y)dy \neq 0, \\ 0, \quad n=2, \quad \text{егер} \displaystyle\int\limits_{\Omega} \mu(y)dy = 0, \\ 0, \quad n \geq 3. \end{cases}$$

2. Егер $\mu(x) \in C(\bar{\Omega})$ болса, онда $u(x) \in C^1(R^n)$ және (5.3.106) теңдікті оңжағындағы интеграл астынан туынды ала отырып, x бойынша дифференциалдауға болады, яғни

$$u_{x_i}(x) = \int\limits_{\Omega} E_{x_i}(x,\xi)\mu(\xi)d\xi, \quad i = 1,2,...n, \quad n > 2.$$

3. Егер $\mu(x) \in C^1(\Omega)\bigcap C(\bar{\Omega})$ болса, онда $u(x)$ потенциалдың екінші ретті туындылары шекарадан $x_0 \in S$ нүктеде өткенде үзілістікке ұшырайды:

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\right|_{\substack{x \in \Omega \\ x \to x_0 \in \partial\Omega}} - \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\right|_{\substack{x \in R^n \backslash \bar{\Omega} \\ x \to x_0 \in \partial\Omega}} = \frac{\mu(x_0)}{n}$$

4. Егер $\mu(x) \in C^1(\Omega)\bigcap C(\bar{\Omega})$ болса, онда (5.3.106) теңдікпен анықталған $u(x)$ потенциал

$$\Delta u(x) = -\omega_n \mu(x),\ x \in \Omega$$

Пуассон теңдеуін қанағаттандырады.
5. Егер $f(x) \in C^1(\Omega)\bigcap C(\bar{\Omega})$ болса, онда

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Пуассон теңдеуі үшін Дирихле есебінің шешімі

$$u(x) = -\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\Omega} G(x,\xi) f(\xi) d\xi$$

көлемдік потенциалы арқылы есептеледі, мұндағы $G(x,\xi)$– Ω облысында қойылған Лаплас теңдеуі үшін Дирихле есебінің Грин функциясы (қараңыз).

Айталық, $\mu(x) \in C(\partial\Omega)$ – S бетте берілген үзіліссіз функция болсын.

Анықтама 5.3.4. *S беттіне таралған тығыздығы $\mu(x)$ массаның қос қабаттық потенциалы деп*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{S} \frac{\partial E(x,\xi)}{\partial \vec{n}_\xi}\mu(\xi) ds_\xi \tag{5.3.108}$$

функциясын айтады.

Анықтама 5.3.5. *S беттіне таралған тығыздығы $\mu(x)$ массаның жай қабаттық потенциалы деп S беттінен басқа барлық $x \in R^n$, $n > 2$ нүктелерде гармоникалық және $|x| \to \infty$ кезде нөлге ұмтылатын*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{S} E(x,\xi)\mu(\xi) ds_\xi \tag{5.3.109}$$

функциясын айтады.

Бұл екі потенциалдар үшін Ω^+ облыстан Ω^- облысқа өткенде келесі қасиеттер орынды.

1. қос қабаттық потенциал $x \to x_0 \in S$ кезде

$$u^+(x_0) - u(x_0) = -\frac{\mu(x_0)}{2}, \quad u^-(x_0) - u(x_0) = \frac{\mu(x_0)}{2}$$

үзілістікке ұшырайды және оның нормал туындысы үзіліссіз болады:

$$\left.\frac{\partial u^{+}(x)}{\partial \vec{n}}\right|_{x_0}=\left.\frac{\partial u^{-}(x)}{\partial \vec{n}}\right|_{x_0},$$

мұндағы

$$u^{+}(x_0)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Omega^{+}}} u(x),\quad u^{-}(x_0)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Omega^{-}}} u(x),\quad u(x_0)=\left.u(x)\right|_{x=x_0\in S}$$

2. Айталық

$$\begin{cases}\Delta u(x)=0, & x\in\Omega,\\ u|_{\partial\Omega}=\varphi(x), & x\in\partial\Omega\end{cases}\qquad(5.3.110)$$

Дирихле есебі берілсін. (5.3.108) қос қабаттық потенциал тығыздығы $\mu(x)$

$$\mu(s)+\int\limits_{S} K(s,t)\,\mu(t)dt=-2\varphi(s)$$

Интегралдық теңдеуді қанағаттандыған кезде (5.3.110) Дирихле есебінің шешімін береді.

3. Жай қабаттық потенциал $x\to x_0\in S$ кезде үзіліссіз ал оның нормал туындысы

$$\left.\frac{\partial u^{+}(x)}{\partial \vec{n}}\right|_{x_0}-\left.\frac{\partial u(x)}{\partial \vec{n}}\right|_{x_0}=\frac{\mu(x_0)}{2},\qquad \left.\frac{\partial u^{-}(x)}{\partial \vec{n}}\right|_{x_0}-\left.\frac{\partial u(x)}{\partial \vec{n}}\right|_{x_0}=-\frac{\mu(x_0)}{2}$$

үзілістікке ұшырайды.

5.3.4. Жаттығулар

Грин функциясын қолданып, келесі есептерді шешіңіздер:

5.3.1. $\Delta u(x_1,x_2)=0,\ u|_{x_2=0}=\begin{cases}-1, & x_1\le 0,\\ 0, & x_1>0,\end{cases}\quad x_1\in\mathbb{R},\ x_2>0.$

5.3.2. $\Delta u(x_1,x_2)=0,\ \ u\,|_{x_2=0}=\sin 2x_1,\ \ x_1\in\mathbb{R},\ \ x_2>0.$

5.3.3. $\Delta u(x_1,x_2)=0,\ u|_{x_2=0}=\begin{cases}1, & x_1\ge a,\\ 0, & x_1<a,\end{cases}\quad x_1\in\mathbb{R},\ x_2>0.$

5.3.4. $\Delta u(x_1,x_2)=0,\quad x_1,\ x_2\ge 0,\ \ u|_{x_1=0}=a,\ \ u|_{x_2=0}=b,\ \ a,b=const.$

5.3.5. $\Delta u(x_1,x_2,x_3)=0,\ \ u|_{x_3=0}=\cos x_1\cos x_2,\ \ x_1,\ x_2\in\mathbb{R},\ \ x_3>0.$

5.3.6. $\Delta u(x_1,x_2)=0,\ \ u(x_1,x_2)\,|_{x_2=0}=\dfrac{1}{1+x_1^2},\ \ x_1\in\mathbb{R},\ \ x_2>0.$

5.3.7. $\Delta u\left(x_1, x_2\right)=0, \quad u\left(x_1, x_2\right)\left.\right|_{x_2=0}=\dfrac{x_1}{1+x_1^2}, \;\; x_1 \in \mathbb{R}, \;\; x_2 \geq 0.$

5.3.8. $\Delta u\left(x_1, x_2\right)=0, \quad u\left(x_1, x_2\right)\left.\right|_{x_2=0}=\dfrac{x_1^2-1}{\left(1+x_1^2\right)^2}, \;\; x_1 \in \mathbb{R}, \;\; x_2 \geq 0.$

5.3.9. $\Delta u\left(x_1, x_2\right)=0, \quad u\left(x_1, x_2\right)\left.\right|_{x_2=0}=\cos x_1, \;\; x_1 \in \mathbb{R}, \;\; x_2 \geq 0.$

5.3.10. $\Delta u\left(x_1, x_2\right)=\sigma, \quad u\left(x_1, x_2\right)\left.\right|_{x_2=0}=b, \;\; x_1 \in \mathbb{R}, \;\; x_2 \geq 0.$

5.3.11. $\Delta u\left(x_1, x_2, x_3\right)=0, \quad u\left(x_3\right)\left.\right|_{x 3=0}=\varphi\left(x_1, x_2\right), \;\; x_1, \quad x_2 \in \mathbb{R}, \;\; x_3>0.$

5.3.12. $\Delta u\left(x_1, x_2, x_3\right)=e^{-x_3} \sin x_1 \cos x_2, \;\; u\left.\right|_{x_3=0}=0, \;\; x_1, \, x_2 \in \mathbb{R}, \quad x_3>0.$

5.3.13. $\Delta u\left(x_1, x_2, x_3\right)=0, \;\; u\left.\right|_{x_3=0}=\Theta\left(x_2-x_1\right), \;\; x_1, \, x_2 \in \mathbb{R}, \;\; x_3>0.$

5.3.14. $\Delta u\left(x_1, x_2, x_3\right)=0, \quad u\left.\right|_{x_3=0}=e^{-4 x_1} \sin 5 x_2, \;\; x_1, \, x_2 \in \mathbb{R}, \;\; x_3>0.$

5.3.15. $\left\{\begin{array}{l}\Delta u\left(x_1, x_2, x_3\right)=2\left[x_1^2+x_2^2+\left(x_3+1\right)^2\right]^{-2}, \\ u\left(x_1, x_2, x_3\right)\left.\right|_{x_3=0}=\left(1+x_1^2+x_2^2\right)^{-1}, \;\; x_1, \, x_2 \in \mathbb{R}, \quad x_3>0.\end{array}\right.$

5.3.5. Жауаптары

5.3.1. $u\left(x_1, x_2\right)=\dfrac{1}{\pi} \arctan \dfrac{x_1}{x_2}-\dfrac{1}{2}.$

5.3.2. $u\left(x_1, x_2\right)=e^{-2 x_2} \sin 2 x_1.$

5.3.3. $u\left(x_1, x_2\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi} \arctan \dfrac{x_1-a}{x_2}.$

5.3.4. $u\left(x_1, x_2\right)=\dfrac{2}{\pi}\left(a \arctan \dfrac{x_2}{x_1}+b \arctan \dfrac{x_1}{x_2}\right).$

5.3.5. $u\left(x_1, x_2\right)=e^{-\sqrt{2} x_3} \cos x_1 \cos x_2.$

5.3.6. $u\left(x_1, x_2\right)=\dfrac{x_2+1}{x_1^2+\left(x_2+1\right)^2}.$

5.3.7. $u\left(x_1, x_2\right)=\dfrac{x_1}{x_1^2+\left(x_2+1\right)^2}.$

5.3.8. $u\left(x_1, x_2\right)=\dfrac{x_1^2-\left(x_2+1\right)^2}{\left[x_1^2+\left(x_2+1\right)^2\right]^2}.$

5.3.9. $u\left(x_1, x_2\right)=e^{-x_2} \cos x_1.$

5.3.10. $u(r, \Psi)=\dfrac{a}{4}\left(R^2-r^2\right)+b.$

5.3.11. $u\left(x_1,x_2,x_3\right)=\dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{1}{|x-\xi|}+\dfrac{1}{|x-\xi^*|}\right]\Bigg|_{\xi_3=0}d\xi_1 d\xi_2,$
мұндағы $x\left(x_1,x_2,x_3\right),\ \xi\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3\right),\ \xi^*\left(\xi_1,\xi_2-\xi_3\right)$ *нүктелер.*

5.3.12. $u\left(x_1,x_2,x_3\right)=\left(e^{-\sqrt{2}x_3}-e^{-x_3}\right)\sin x_1\cos x_2.$

5.3.13. $u\left(x_1,x_2,x_3\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}arctg\dfrac{x_2-x_1}{\sqrt{2}x_3}.$

5.3.14. $u\left(x_1,x_2,x_3\right)=e^{-4x_1-3x_3}\sin 5x_2.$

5.3.15. $u\left(x_1,x_2,x_3\right)=\left[x_1^2+x_2^2+\left(x_3+1\right)^2\right]^{-1}.$

6 Бөлім

Интегралдық түрлендірулер әдісі

6.1 Интегралдық түрлендірулер әдісі

Математкалық физика есептерін шешудің тиімді әдістерінің бірі – интегралдық түрлендірулер әдісі.

Интегралдық түрлендірулердің түрі көп және олар өз алдына үлкен бір теория. Бұл бөлімде осындай интегралдық түрлендірулердің ішіндегі ең қарапайым әрі жиі қолданылатын Фурье және Лапластың интегралдық түрлендірулерін қарастыратын боламыз.

Анықтама 6.1.1. $f(t)$ *функциясының интегралдық түрлендіруі деп*

$$\tilde{f}(z) = \int_a^b K(z,t)\, f(t)dt$$

интегралы арқылы анықталған $\tilde{f}(z)$ *функциясын айтамыз. Мұндағы* $f(t)$ *түпнұсқа,* $\tilde{f}(z)$ *функциясы бейне (интегралдық түрлендіруі),* $K(z,t)$ *интегралдық түрлендірудің ядросы деп аталады.*

Интегралдық түрлендіру әдісі арқылы дербес туындылы теңдеулер (ДТДТ) үшін қойылған есептерді шешудің алгоритмі келесідей:

1. Ізделінді U функциясы үшін ДТДТ-ге қойылған есепті (Коши, шеттік, бастапқы-шеттік) қайсыбір бір айнымалысы бойынша интегралдық түрлендіруді қолданып, оны U функциясының интегралдық түрлендіруі болатын $\tilde{U}$ функциясы үшін жай дифференциалдық теңдеуге (ЖДТ) қойылған есепке (Коши немесе шеттік) түрлендіру.

2. ЖДТ үшін алынған есептің $\tilde{U}$ шешімін табу.

3. Кері интегралдық түрлендіруі арқылы бастапқы есептің U шешімін анықтау.

6.2 Фурьенің интегралдық түрлендірулері

Анықтама 6.2.1. *$f(x)$ функциясы үшін Фурьенің интегралдық түрлендіруі деп*

$$F[f] \equiv \tilde{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\infty} f(x)\, e^{-i\,x\lambda} dx \tag{6.2.1}$$

интегралын, ал кері түрлендіруі деп

$$F^{-1}[f] \equiv f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\infty} \tilde{f}(\lambda)\, e^{i\,x\lambda} d\lambda \tag{6.2.2}$$

интегралын айтады.

$f(x)$ функциясы үшін (6.2.1) Фурье түрлендіруі бар болуы үшін $f(x)$ функциясының $(-\infty, +\infty)$ аралығында үзіліссіз болуы $f(x) \in C(R)$ немесе осы аралықта саны арқылы бірінші ретті үзіліс нүктелері болуы және

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$$

интегралының абсолютті жинақты болуы жеткілікті.

Егер $f(x)$ жұп функция болса, онда (6.2.1), (6.2.2) түрлендірулердің орнына сәйкес *Фурьенің косинус түрлендірулерін* (тура және кері):

$$F_c[f] \equiv \tilde{f}(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{+\infty} f(x) \cos \lambda x dx, \tag{6.2.3}$$

$$F_c^{-1}[f] \equiv f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{+\infty} \tilde{f}(\lambda) \cos \lambda x d\lambda, \tag{6.2.4}$$

ал $f(x)$ тақ функция болса, онда *Фурьенің синус түрлендірулерін*

$$F_s[f] \equiv \tilde{f}(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{+\infty} f(x) \sin \lambda x dx, \tag{6.2.5}$$

$$F_s^{-1}[f] \equiv f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{+\infty} \tilde{f}(\lambda) \sin \lambda x d\lambda \tag{6.2.6}$$

қолдануға болады.

Анықтама 6.2.2. *(үйірткі).* *$(-\infty, +\infty)$ аралықта анықталған, шенелген және абсолют интегралданатын $\varphi(x)$ және $\psi(x)$ функцияларының үйірткісі деп*

$$\varphi * \psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, \psi(x-t)\, dt \tag{6.2.7}$$

өрнегін атайды.

6.2.1. Фурьенің интегралдық түрлендіруінің негізгі қасиеттері

Айталық, $u(x,t) \in L^1(R)$, $u(x,t) \to 0$, $x \to \pm\infty$, функциясының x айнымалысы бойынша Фурье түрлендіруі $F[u] = \tilde{u}(\lambda, t)$ болсын. Келесі қасиеттер орынды:

1. Сызықтығы. $F[c_1 u_1 + c_2 u_2] = c_1 F[u_1] + c_2 F[u_2] = c_1 \tilde{u}_1 + c_2 \tilde{u}_2$.

2. Дербес туындылары туралы.

$$F[u_x] = i\lambda \tilde{u}(\lambda, t), \;\; F[u_{xx}] = (i\lambda)^2 \tilde{u}(\lambda, t), \; ..., F\left[\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right] = (i\lambda)^n \tilde{u}(\lambda, t);$$

$$F[u_t] = \tilde{u}_t(\lambda, t), \;\; F[u_{tt}] = \tilde{u}_{tt}(\lambda, t), \; ..., F\left[\frac{\partial^n u}{\partial t^n}\right] = \frac{\partial^n \tilde{u}(\lambda, t)}{\partial t^n}$$

3. Егер $u(x) \in C(R)$, $u_x(x) \in L^1[0, \infty)$ және $u(x) \to 0$, $x \to +\infty$ болса, онда

$$F_c[u_x] = \lambda F_s[u] - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tilde{u}(0), \;\; F_s[u_x] = -\lambda F_c[u]$$

$$F_c[u_{xx}] = -\lambda^2 F_c[u] - \sqrt{\frac{2}{\pi}} u_x(0), \;\; F_s[u_{xx}] = -\lambda^2 F_s[u] + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda u(0).$$

4. Үйірткі туралы. φ мен ψ функцияларының үйірткісі үшін

$$F[\varphi * \psi] = F[\varphi] \cdot F[\psi]$$

теңдігі орындалады.

5. $F[f(x+a)] = e^{-i\lambda a} F[f]$.

6. $F\left[\int\limits_0^x f(\eta)\, d\eta\right] = \dfrac{F[f]}{i\lambda}$.

Мысал 6.2.1. *Коши есебін*

$$u_{xx} - u_{tt} = 0,\ t > 0,\ \ x \in (-\infty, +\infty) \equiv R^1,$$
$$u\left(x, 0\right) = \varphi\left(x\right),\ \ u_t\left(x, 0\right) = \psi\left(x\right),\ \ x \in R^1$$

Фурье түрлендіруін (x айнымалы) қолданып шешіңіз.

Шешуі. Есепке Фурье түрлендіруін x айнымалы бойынша қолдансақ, онда 1-2 қасиеттері бойынша есеп мына жай дифференциалдық теңдеу үшін Коши есебіне келтіріледі:

$$\frac{d^2\tilde{u}\left(\lambda, t\right)}{dt^2} + \lambda^2\tilde{u}\left(\lambda, t\right) = 0,\ \ \tilde{u}\left(\lambda, 0\right) = \tilde{\varphi}\left(\lambda\right),\ \ \frac{d\tilde{u}\left(\lambda, 0\right)}{dt} = \tilde{\psi}\left(\lambda\right).$$

Бұл есептің жалпы шешімі:

$$\tilde{u}\left(\lambda, t\right) = C_1\left(\lambda\right)e^{i\lambda t} + C_2\left(\lambda\right)e^{-i\lambda t}.$$

Бастапқы шарттарды қолдансақ:

$$C_1\left(\lambda\right) = \frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}\left(\lambda\right) + \frac{1}{i\lambda}\tilde{\psi}\left(\lambda\right)\right],\ C_2\left(\lambda\right) = \frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}\left(\lambda\right) - \frac{1}{i\lambda}\tilde{\psi}\left(\lambda\right)\right]\ \ \Rightarrow$$

$$\tilde{u}\left(\lambda, t\right) = \frac{1}{2}\tilde{\varphi}\left(\lambda\right)\left(e^{i\lambda t} + e^{-i\lambda t}\right) + \frac{1}{2i\lambda}\tilde{\psi}\left(e^{i\lambda t} - e^{-i\lambda t}\right).$$

Бұған (6.2.2) Фурьенің кері түрлендіруін қолданып, бастапқы есептің шешімін аламыз

$$u\left(x, t\right) = \tfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[e^{i\lambda(x+t)} + e^{i\lambda(x-t)}\right]\tilde{\varphi}\left(\lambda\right)d\lambda +$$
$$+\tfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[e^{i\lambda(x+t)} - e^{i\lambda(x-t)}\right]\frac{1}{i\lambda}\tilde{\psi}\left(\lambda\right)d\lambda = (5^{\circ}, 6^{\circ}) =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\varphi\left(x-t\right) - \varphi\left(x-t\right)\right] + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\psi\left(\tau\right)d\tau.$$

Бұл кәдімгі Даламбер формуласы (53 бет, (3.2.12) қараңыз).

Мысал 6.2.2. *Жылуөткізгіштік теңдеуі үшін*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, -\infty < x < \infty,\quad t > 0, \tag{6.2.8}$$

$$u\left(x, 0\right) = \varphi\left(x\right),\ -\infty < x < \infty \tag{6.2.9}$$

Коши есебін Фурье интегралдық түрлендіруі арқылы шешейік.

Шешуі. Айталық, $\tilde{u}(\lambda, t) = F[u(x,t)]$ және $\tilde{\varphi}(\lambda) = F[\varphi(x)]$, сәйкес $u(x,t)$ және $\varphi(x)$ функцияларының x айнымалысы бойынша Фурье түрлендірулері болсын. Жоғарыдағы қасиеттерді ескере отырып, (6.2.8) теңдеуге және (6.2.9) бастапқы шартқа Фурье түрлендіруін x айнымалысы бойынша қолдансақ, нәтижеде (6.2.8)-(6.2.9) есебі

$$\tilde{u}' + (a\lambda)^2 \tilde{u} = 0, \quad \tilde{u}(\lambda, 0) = \tilde{\varphi} \tag{6.2.10}$$

бірінші ретті жай дифференциалдық теңдеуге қойылған Коши есебіне түрленеді. Жай дифференциалдық теңдеулер курсын белгілі (6.2.10) Коши есебінің шешімі

$$\tilde{u}(\lambda, t) = \tilde{\varphi}(\lambda)\ e^{-(a\lambda)^2 t}.$$

Табылған $\tilde{u}(\lambda, t)$ кескін шешімге (6.2.2) Фурьенің кері түрлендіруін қолдансақ

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}(\lambda, t)\ e^{i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(\lambda)\ e^{-(a\lambda)^2 t} e^{i\lambda x} d\lambda$$

теңдігін аламыз. Бұған

$$\tilde{\varphi}(\lambda) = F[\varphi(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\ e^{-i\lambda y} dy$$

түрлендіруін қойсақ

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} e^{i(\lambda x - \lambda y)} d\lambda \right] dy.$$

Ішкі интегрант Эйлер формуласы[1] бойынша:

$$e^{-a^2\lambda^2 t} e^{i(\lambda x - \lambda y)} = e^{-a^2\lambda^2 t} \cos(\lambda x - \lambda y) + i e^{-a^2\lambda^2 t} \sin(\lambda x - \lambda y).$$

Бұл комплекс айнымалы функцияның жорамал бөлігі λ бойынша тақ функция екені анық. Олай болса, оның интегралы нөлге тең. Ал нақты бөлігі жұп функция. Сондықтан $(-\infty, \infty)$ аралығы бойынша интегралы $[0, \infty)$ бойынша интегралды екі еселегенге тең, яғни

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \left[\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} \cos(\lambda x - \lambda y)\, d\lambda \right] dy. \tag{6.2.11}$$

[1] $e^{iz} = \cos z + i \sin z$

Ішкі интегралға $s=\lambda a\sqrt{t},\quad b=\dfrac{x-y}{2a\sqrt{t}}$ белгілеулер енгізіп және

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-s^2}\cos 2bsdz=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-s^2} \tag{6.2.12}$$

формуланы қолдансақ, онда

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\left(\lambda x-\lambda y\right)d\lambda=\frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}$$

теңдігін аламыз. Мұны (6.2.11) қойсақ

$$u\left(x,t\right)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(y\right)e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}dy \tag{6.2.13}$$

ізделінді шешімді аламыз. Бұл – 3.3.1.-бөлімдегі (71-бет, (3.3.36)-ны қараңыз) дәлелдеусіз берілген Пуассон формуласы.

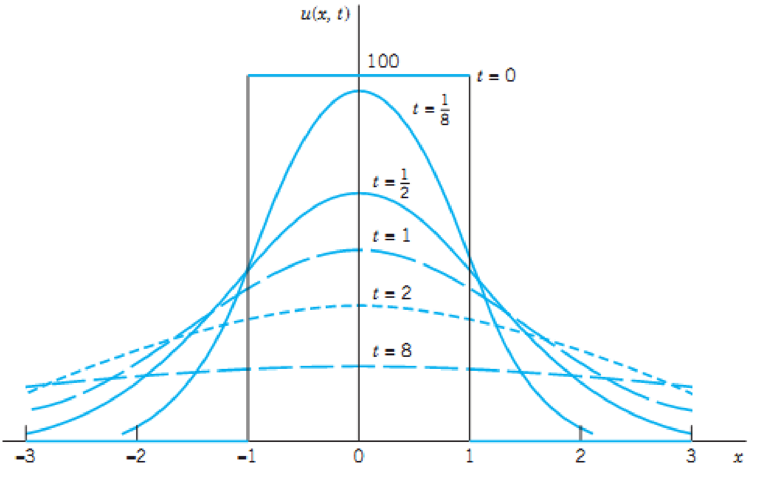
Айталық,

$$a=1,\ \varphi\left(x\right)=\begin{cases}100, & |x|<1,\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$

болсын. Онда (6.2.13) бойынша:

$$u\left(x,t\right)=\frac{100}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-1}^{1}e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}dy=\left|z=\frac{x-y}{2\sqrt{t}}\right|=\frac{100}{\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\frac{(1+x)}{2\sqrt{t}}}^{\frac{(1-x)}{2\sqrt{t}}}e^{-z^2}dz.$$

Бұл $u\left(x,t\right)$ функциясының әр түрлі t уақыттардағы графигі (график Maple 11 бағдарламасымен алынды) 6.2.1-а суретте көрсетілді.



6.2.1-а сурет. $\varphi(x) = 100,\ a = 1$ болған кездегі $u(x,t)$ шешімнің бірнеше t уақыт мезетіндегі графигі

Берілген есептің шешімін кейде $[0, +\infty)$ аралықта анықтау қажет болады. Міне бұл жағдайда шешімді табиғатына (жұп немесе тақ) байланысты (6.2.3)-(6.2.6) Фурьенің косинус немесе синус түрлендірулерді қолдануға болады немесе $(-\infty, 0)$ жарты өске тақ немесе жұп түрде (кейбір жағдайда нөлмен) жалғастырып жоғарыдағы (6.2.1)-(6.2.2) Фурьенің түрлендірулерін қолдануға болады.

Мысал 6.2.3. *Жарты жазықтықта берілген Жылуөткізгіштік теңдеуі үшін Коши есебін Фурье интегралдық түрлендіруі арқылы шешіңіз:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad x > 0, \quad t > 0,$$

$$u(0,t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \geq 0.$$

Шешуі. Есепке x айнымалысы бойынша (6.2.5) Фурьенің синус түрлендіруін қолданайық. Синус түрлендіруінің қасиеттерін және $u(0,t) = 0$ шартын қолданып:

$$F_s[u_t] = \tilde{u}_t(\lambda, t)\,,\ a^2 F_s[u_{xx}] = -a^2\lambda^2 \tilde{u}(\lambda, t) \text{ және } F_s[u(x,0)] = F_s[\varphi(x)] = \tilde{\varphi}(\lambda)\,,$$

нәтижеде бірінші ретті жай дифференциалдық теңдеу үшін Коши есебін аламыз:

$$\tilde{u}' + (a\lambda)^2\, \tilde{u} = 0, \ \ \tilde{u}(\lambda, 0) = \tilde{\varphi}.$$

Бұл есептің шешімі

$$\tilde{u}(\lambda, t) = \tilde{\varphi}(\lambda)\ e^{-(a\lambda)^2 t}.$$

Бұған енді (6.2.6) Фурьенің кері синус түрлендіруін қолданып, одан кейін

$$\tilde{\varphi}(\lambda) = F_s[\varphi(x)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty \varphi(y) \sin\lambda y dy$$

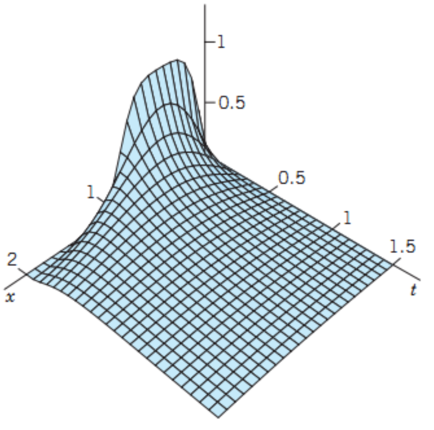
қойсақ, нәтижеде

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \varphi(y)\ \sin\lambda y e^{-(a\lambda)^2 t} \sin\lambda x dy dx.$$

ізделінді шешімді аламыз. Бұл интегралға (6.2.12) формуланы қолданып, одан әрі интегралдап, $u\,(x,t)$ шешімнің екінші бір түрін алуға болады:

$$u\,(x,t)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\varphi\,(y)\;\sin\lambda y e^{-(a\lambda)^2t}\sin\lambda x dy dx=$$
$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\varphi\,(y)\int\limits_0^\infty\;e^{-(a\lambda)^2t}\left[\cos\lambda(x+y)+\cos\lambda(x-y)\right]dxdy=$$
$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^\infty\varphi\,(y)\left[e^{-\frac{(x+y)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}\right]dy.$$

Бұл мысал жоғарыда 3.4.2.-бөлімде жалғастыру әдіс арқылы да шығарылғанды (90-бет, 3.4.6-мысалды қараңыз).
Бұл шешімнің $\varphi\,(x)=\begin{cases}1,\ 0\le x\le 1,\\ 0,\ \ x>1\end{cases}$ және $a=1$ болған кездегі $0\le x\le 2,\ \ 0,01\le t\le 1,5$ аралығындағы графигі 6.2.1-ә суретте көрсетілген.



6.2.1-ә сурет. 6.2.3-мысал есептің $0\le x\le 2,\ \ 0,01\le t\le 1,5$ аралығындағы $u(x,t)$ шешімі

Ескерту 6.2.1. *Егер* $u\,(0,t)=0$ *шекаралық шарттың орнында* $u_x\,(0,t)=0$ *шарты берілсе,* (6.2.3)-(6.2.4) *Фурьенің косинус түрлендірулері қолданылады.*

6.3 Лапластың интегралдық түрлендіруі

Айталық, $[0,+\infty)$ аралығында анықталған нақты немесе комплекс мәнді $f(t)$ функциясы келесі шарттарды қанағаттандырсын:

1. $[0,\infty)$ аралығында үзіліссіз немесе осы аралықта саны ақырлы бірінші ретті үзіліс нүктелері бар,
2. $f(t)=0,\ \ t\in(-\infty,0)\,,$
3. $M>0$ және $s_0>0$ сандары табылып, барлық $t\in[0,\infty)$ үшін

$$|f(t)|<Me^{s_0t}$$

теңсіздігі орындалсын. Осындай $f(t)$ функциясының $Re(p)>s_0$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық $p=x+iy$ комплекс айнымалысы үшін

$$F(p)=\int\limits_0^{\infty} f(t)\ e^{-pt}dt \tag{6.3.14}$$

интегралы бар болады және ол $Re(p)\ >\ s_0$ жарты жазықтығында аналитикалық функцияны анықтайды.

Анықтама 6.3.1. (6.3.14) *интегралымен анықталған* $F(p)$ *функциясы* $f(t)$ *функциясының* кескіні *немесе Лаплас түрлендіруі деп, ал* $f(t)$ *функциясы түпнұсқа функция деп аталады.*

Егер $F(z)$ функциясы $Rep\ >\ s_0$ жарты жазықтығында аналитикалық және

$$\lim_{p\to\infty}F(p)=0,$$

сонымен қатар

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(a+iy)\ dy$$

интегралы абсолютті жинақты болса, онда Лаплас түрлендіруіне кері түрлендіру бар болады және ол

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(a+iy)\ e^{(a+iy)t}dy \tag{6.3.15}$$

формуласы арқылы анықталады.
Лапластың тура және кер түрлендірулерін қысқаша сәйкес
$L[f(t)]=F(p)\,,\ \ f(t)\to F(p)$ және $L^{-1}[F(p)]=f(t)\,,\ \ F(p)\to f(t)$ белгілейді.

6.3.1. Лаплас түрлендіруінің негізгі қасиеттері.

Айталық, $f(t)$ және $g(t)$ функцияларының Лаплас түрлендірулері сәйкес $F(p)$, $\Phi(p)$ функциялары болсын.

1. Сызықтық. Кез келген a, b сандары үшін

$$L\left[af\left(t\right)+bg\left(t\right)\right]=aF\left(p\right)+b\Phi\left(p\right).$$

2. Ұқсастық.

$$L\left[f\left(t\right)\right]=\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right),$$

мұндағы α – кез келген комплекс сан.

3. Түп нұсқаны дифференциалдау. Егер

$$f^{(k)}\left(t\right)\in C\left[0,+\infty\right),\ k=0,1,...n-1$$

болса, онда келесі теңдік орынды:

$$L\left[f^{(n)}\left(t\right)\right]=p^{n}F\left(p\right)-p^{n-1}f\left(0\right)-p^{n-2}f'\left(0\right)-...-pf^{(n-2)}\left(0\right)-f^{(n-1)}\left(0\right).$$

Салдар. Егер $u(x,t)$ функциясының t бойынша Лаплас түрлендіруі $L_t\left[u(x,t)\right]=U(x,p)$ болса, онда

$$L_t\left[u_t\left(x,t\right)\right]=pU\left(x,p\right)-u\left(x,0\right),$$

$$L_t\left[u_{tt}\left(x,t\right)\right]=p^2U\left(x,p\right)-pu\left(x,0\right)-u_t\left(x,0\right)$$

$$L_t\left[\frac{\partial^{(n)}u\left(x,t\right)}{\partial x^{(n)}}\right]=\frac{d^{(n)}U\left(x,p\right)}{dx^{(n)}},\ n=1,2,...$$

өрнектері орынды.

4. Кескінді дифференциалдау. $L\left[-tf\left(t\right)\right]=F'\left(p\right)$.

5. Интегралдың Лаплас түрлендіруі. Егер $f\left(t\right)\in C\left[0,+\infty\right)$ болса, онда

$$L\left[\int\limits_0^t f\left(\xi\right)d\xi\right]=\frac{F\left(p\right)}{p}\ \text{және}\ L\left[\frac{F\left(p\right)}{p}\right]=\int\limits_0^t f\left(\xi\right)d\xi$$

теңдіктері орынды.

6. Кешігу. Кез келген оң $\tau>0$ саны үшін

$$L\left[f\left(t-\tau\right)\right]=e^{-p\tau}F\left(p\right).$$

7. Кескіннің жылжуы. Кез келген a комплекс саны үшін

$$L\left[e^{at}f\left(t\right)\right]=F\left(p-a\right)\ \text{және}\ L^{-1}\left[F\left(p-a\right)\right]=e^{at}f\left(t\right)$$

теңдіктері орынды.

Мысал 6.3.1. $Q = \{(x,t):\ 0<x<+\infty,\ \ t>0\}$ *облысында жылуөткізгіштік теңдеуі үшін қойылған есептің шешімін анықтаңыз:*

$$\begin{aligned}&u_t=u_{xx}+u-f(x)\,, \qquad (x,t)\in Q,\\ &u\left(0,t\right)=t,\ u_x\left(0,t\right)=0,\ \ t>0.\end{aligned}$$

Шешуі. Лаплас түрлендіруін x айнымалысы бойынша қолданайық. Лаплас түрлендіруінің дифференциалдау қасиеттері және $u\left(0,t\right)=t,\ u_x\left(0,t\right)=0$ шарттары бойынша

$$L\left[u(x,t)\right]=U\left(p,t\right),\quad L\left[u_t(x,t)\right]=U_t\left(p,t\right),\quad L\left[u_x(x,t)\right]=pU\left(p,t\right)-t,$$

$$L\left[u_{xx}(x,t)\right]=p^2U\left(p,t\right)-pt,\qquad L\left[f(x)\right]=F(p).$$

Олай болса, берілген есеп келесі p параметрі бар, t айнымалы бойынша келесі бірінші ретті жай дифференциалдық теңдеуге түрленеді:

$$U_t-\left(1-p^2\right)U=-\left(F(p)+pt\right).$$

Бұл теңдеудің жалпы шешімі:

$$U\left(p,t\right)=Ce^{\left(1+p^2\right)t}+\frac{p}{\left(1+p^2\right)^2}+\frac{F\left(p\right)}{1+p^2}+\frac{pt}{1+p^2}.$$

(6.3.15) Лапласың кері түрлендіруі бар болу шарты бойынша мұндағы C тұрақтысы $C=0$ болу керек. Себебі егер $C\neq 0$ болса, $p\to\infty$ кезде $U(p,t)\to\infty$ шенелмеген болады да Лаплас түрлендіруінің бейнесінің бар болу шарты орындалмас еді. Олай болса, кескін шешім

$$U\left(p,t\right)=\frac{p}{\left(1+p^2\right)^2}+\frac{F\left(p\right)}{1+p^2}+\frac{pt}{1+p^2}.$$

Енді $u(x,t)$ түпнұсқа шешімді анықтайық. Лаплас түрлендіруінің кестесі бойынша (285 - беттегі А-қосымшаны қараңыз):

$$\frac{p}{\left(1+p^2\right)^2}\to\cos x,$$

және үйірткінің қасиеті бойынша

$$\frac{F\left(p\right)}{1+p^2}\to\int\limits_0^x f(y)\sin(x-y)dy,\qquad \frac{pt}{1+p^2}\to\frac{1}{2}x\sin x.$$

Демек, бастапқы есептің шешімі

$$u(x,t)=\frac{1}{2}x\sin x+t\cos x+\int\limits_0^x f(y)\sin(x-y)dy.$$

Мысал 6.3.2. $Q = \{(x,t): \ 0 < x < +\infty, \quad t > 0\}$ *облысында келесі есептің шешімін анықтаңыз.*

$$\begin{array}{l} 4u_{tt} + 9u_{xx} = 36e^{2x} \sin 3t \ , \qquad (x,t) \in Q, \\ u\,(0,t) = 0, \ u_x\,(0,t) = \sin 3t, \ \ t > 0, \\ u\,(x,0) = 0, \ u_t\,(x,0) = 3xe^{2x}, \ \ x \geq 0. \end{array} \tag{6.3.16}$$

Шешуі. Лаплас түрлендіруін x айнымалысы бойынша қолданайық. Айталық, $U\,(p,t)$ функциясы $u\,(x,t)$ функциясының Лаплас түрлендіруі болсын, яғни

$$U\,(p,t) = L\,[u\,(x,t)] = \int\limits_0^\infty u(x,t)e^{-px}dx.$$

Онда шекаралық шарттар және Лаплас түрлендіруінің қасиеттері бойынша

$$L\ [u_{tt}(x,t)] = U_{tt}\,(p,t)\,, \quad L\,[u_{xx}(x,t)] = p^2 U\,(p,t) - \sin 3t,$$

$$L\left[36e^{2x}\sin 3t\right] = \frac{36}{p-2}\sin 3t, \quad L\,[u(x,0)] = 0, \quad L\ [u_t(x,0)] = \frac{3}{(p-2)^2}$$

болғандықтан, берілген (6.3.16) бастапқы-шеттік есеп мына екінші ретті жай дифференциалдық теңдеуге қойылған Коши есебіне түрленеді:

$$U_{tt} + \frac{9p^2}{4}U = \frac{9(p+2)}{p-2}\sin 3t, \tag{6.3.17}$$

$$U\,(p,0) = 0, \quad U_t\,(p,0) = \frac{3}{(p-2)^2}. \tag{6.3.18}$$

Бұл (6.3.17)-(6.3.18) Коши есебінің шешімі

$$U\,(p,t) = \frac{1}{(p-2)^2}\sin 3t.$$

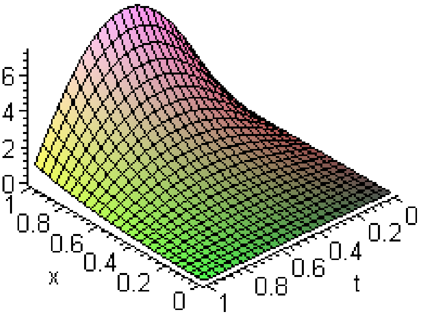
Енді бұл анықталған $U\,(p,t)$ шешімге Фурьенің кері түрлендіруін (кестені) пайдаланып

$$u\,(x,t) = L^{-1}\,[U\,(p,t)] = L^{-1}\left[\frac{1}{(p-2)^2}\sin 3t\right] = xe^{2x}\sin 3t$$

бастапқы берілген (6.3.16) есептің шешімін табамыз. Бұл есепті Maple 11 бағдарламасымен келесі түрде есептеуге болады:

> eq:=9*diff(u(x,t),x,x)+4*diff(u(x,t),t,t)=36*exp(2*x)*sin(3*t); x>0,t>0;
> bc1:=u(0,t)=0;t>0;
> bc2:=D[1](u)(0,t)=sin(3*t); t>0;
> ic1:=u(x,0)=0; x>0;

```
> ic2:=D[2](u)(x,0)=3*x*exp(2*x); x>0;
> with(inttrans,laplace,invlaplace);
> laplace(eq,x,p);
> subs(laplace(u(x,t),x,p)=v(t),bc1,bc2,%);
> dsolve({%,v(0)=laplace(rhs(ic1),x,p),
D(v)(0)=laplace(rhs(ic2),x,p)},{v(t)});
> subs(v(t)=laplace(u(x,t),x,p),%);
> invlaplace(%,p,x);
> plot3d(sin(3*t)*x*exp(2*x),x=0.01..2, t=0..8);
```



6.3.1 сурет. 6.3.1-мысал есептің $0 \le x \le 2,\ 0,01 \le t \le 1,5$ аралығындағы $u(x,t)$ шешімі

6.4 Жаттығу есептері мен жауаптары

6.4.1. Жаттығулар

Жоғарыдағы Лаплас және Фурье түрлендірулерін қолданып, келесі есептерді шешіңіздер:

6.4.1. $u_t = 4u_{xx} + x, \quad x \in (-\infty, \infty), \ t > 0, \qquad u(x,0) = x, \ x \in (-\infty, \infty).$

6.4.2. $u_t = u_{xx} + 2u + t, \ x \in (-\infty, \infty), \ t > 0, \ u(x,0) = x^2 - 1, \ x \in (-\infty, \infty).$

6.4.3. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + xt + 2, \ x \in (-\infty, \infty), \ t > 0, \ u(x,0) = \cos^2 x, \ x \in (-\infty, \infty).$

6.4.4. $\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx} + \sin x, & x \in R^1, \quad t \in (0, +\infty), \\ u(x,0) = 1, \quad u_t(x,0) = 1, & x \in R^1. \end{cases}$

6.4.5. $\begin{cases} u_{tt} = 25u_{xx} + xt, & x \in R^1, \quad t \in (0, +\infty), \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, & x \in R^1. \end{cases}$

6.4.6. $\begin{array}{l} 2u_{xx} + 5u_{xt} + 3u_{tt} = 0, \quad x > 0, \ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \ u_x(0,t) = f(t), \ t > 0; \ u(x,0) = g(x), \ u_t(x,0) = 0 \ \ x > 0. \end{array}$

6.4.7. $\begin{array}{l} u_{xx} + u_{xt} = 0, \quad 0 < x, \ t < \infty, \\ u(0,t) = \mu(t), \ u_x(0,t) = 0, \\ u(x,0) = \phi(x), \ \mu(0) = \phi(0) = 0. \end{array}$

6.4.8. $$\begin{aligned}&u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \ \ -\infty < x < \infty, \ \ t > 0,\\ &u(x,0) = 0, \ -\infty < x < \infty,\\ &\lim_{x\to\pm\infty} u = \lim_{x\to\pm\infty} u_x = 0.\end{aligned}$$

6.4.9. $$\begin{aligned}&u_{tt} = 9u_{xx}, \ \ -\infty < x < \infty, \ \ t > 0,\\ &u(x,0) = 0, \ \ -\infty < x < \infty, \ \ u_t(x,0) = \begin{cases} e^{-2x}, & x \geq 1,\\ 0, & x < 1.\end{cases}\end{aligned}$$

6.4.10. $$\begin{aligned}&u_{tt} = 9u_{xx}, \ \ 0 < x < \infty, \ \ t > 0,\\ &u_x(0,t) = 0, \ \ t > 0,\\ &u(x,0) = \begin{cases} x(1-x), & 0 \leq x \leq 1\\ 0, & x > 1,\end{cases} \qquad u_t(x,0) = 0, \ \ 0 < x < \infty.\end{aligned}$$

6.4.11. $$\begin{aligned}&u_{tt} = c^2 u_{xx} + K, \ \ x > 0, \ t > 0, \ \ K = const,\\ &u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \ \ x > 0,\\ &u(0,t) = f(t), \ \ \lim_{x\to\infty} u(x,t) = 0, \ \ t \geq 0.\end{aligned}$$

6.4.12. $$\begin{aligned}&u_t = ku_{xx}, \ \ 0 < x < l, \ t > 0,\\ &u(x,0) = 0, \ \ 0 < x < l,\\ &u(0,t) = 0, \ \ u(l,t) = T_0 = const, \ \ t > 0.\end{aligned}$$

6.4.13. $$\begin{aligned}&u_{tt} = 196u_{xx}, \ \ 0 < x < \infty, \ \ t > 0,\\ &u(0,t) = 0, \ \ t > 0,\\ &u(x,0) = 0, \ \ 0 < x < \infty, \ \ u_t(x,0) = \begin{cases} x^2(3-x), & 0 \leq x \leq 3\\ 0, & x > 3.\end{cases}\end{aligned}$$

6.4.14. $$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \ \ x \in (0,\infty), \quad t > 0,\\ u_x(0,t) = 5, \ \ t > 0,\\ u(x,0) = -3x, \ \ u_t(x,0) = 0, \quad x > 0.\end{cases}$$

6.4.15. $$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \ \ x \in (0,\infty), \quad t > 0,\\ u_x(0,t) - hu(0,t) = \varphi(t), \ \ t \geq 0,\\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad x \geq 0.\end{cases}$$

6.4.2. Жауаптары

6.4.1. $x(t+1)$.

6.4.2. $e^{2t}\left(x^2 + 2t - \frac{3}{4}\right) - \frac{1}{4}(2t+1)$.

6.4.3. $u(x,t) = 2t + \frac{1}{2}xt^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-t}\cos 2x$.

6.4.4. $u(x,t) = 1 + t + \frac{1}{9}(1 - \cos 3t)\sin x$.

6.4.5. $u(x,t) = \dfrac{xt^3}{6}$.

6.4.6. $u(x,t) = \begin{cases} 3g\left(x - \frac{2}{3}t\right) - 2g\left(x - t\right), & x > t, \\ 3g\left(x - \frac{2}{3}t\right) + 2\int\limits_0^{t-x} f\left(t - x - \xi\right) d\xi, & \dfrac{2}{3}t < x < t, \\ 2\int\limits_0^{t-x} f\left(t - x - \xi\right) d\xi - 2\int\limits_0^{t-\frac{3}{2}x} f\left(t - \dfrac{3}{2}x - \xi\right) d\xi, & x < \dfrac{2}{3}t. \end{cases}$

6.4.7. $u(x,t) = \begin{cases} \phi\left(x - t\right) + \mu\left(t\right), & x - t > 0, \\ \mu\left(t\right), & x - t < 0. \end{cases}$

6.4.8. $u(x,t) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(\xi, \tau\right) \dfrac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}} d\xi d\tau.$

6.4.9. $u(x,t) = \dfrac{1}{3e^2} \int\limits_0^{\infty} \left[\left(\dfrac{2\cos\left(\omega\right) - \omega\sin\left(\omega\right)}{\omega(4+\omega^2)}\right)\cos\left(\omega x\right) + \right.$
$\left.\left(\dfrac{\omega\cos\left(\omega\right) + 2\sin\left(\omega\right)}{\omega(4+\omega^2)}\right)\sin\left(\omega x\right)\right]\sin\left(3\omega t\right) d\omega.$

6.4.10. $u(x,t) = \dfrac{2}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \dfrac{2 - \omega\sin\left(\omega\right) - 2\cos\left(\omega\right)}{\omega^3} \sin\left(\omega x\right)\cos\left(3\omega t\right) d\omega.$

6.4.11. $u(x,t) = \left[f\left(t - \dfrac{x}{c}\right) - \dfrac{K}{2}\left(t - \dfrac{x}{c}\right)^2\right] H\left(t - \dfrac{x}{c}\right) + \dfrac{1}{2}Kt^2.$

6.4.12. $u(x,t) = T_0 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(erfc\left(\dfrac{(2n+1)\,l - x}{2\sqrt{kt}}\right) - erfc\left(\dfrac{(2n+1)\,l + x}{2\sqrt{kt}}\right)\right).$

6.4.13. $u(x,t) = \dfrac{3}{7\pi} \int\limits_0^{\infty} \dfrac{h_\omega}{\omega^5} \sin\left(\omega x\right)\sin\left(14\omega t\right) d\omega,$
$h_\omega = 2\sin\left(3\omega\right) - 4\omega\cos\left(3\omega\right) - 3\omega^2\sin\left(3\omega\right) - 2\omega.$

6.4.14. $u(x,t) = \begin{cases} x^2 t + \frac{1}{3}t^3 + t, & x - t \geq 0, \\ xt^2 + \frac{1}{3}x^3 + t, & x - t \leq 0. \end{cases}$

6.4.15. $u(x,t) = \begin{cases} -3x, & x - t \geq 0, \\ 5x - 8t, & x - t \leq 0. \end{cases}$

6.4.16. $u(x,t) = \begin{cases} 0, & x > at, \\ -ae^{h(x-at)} \int\limits_0^{t-x/a} e^{h\tau}\varphi\left(\tau\right) d\tau, & x < at. \end{cases}$

7 Бөлім

Өзіндік жұмыстар

7.1 Өзіндік жұмыс тапсырмалары

7.1.1. 1 - өзіндік жұмыс. Типін анықтау канондық түрге келтіру, $n = 2$.

1. (a) $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 6u_y = 0.$
   (b) $u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} + u_x + 2u_y = 0.$
   (c) $x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} + xu_x + yu_y = 0, \;\; x > 0.$
2. (a) $u_{xx} - 2\cos x u_{xy} - (3 + \sin^2 x)u_{yy} - yu_y = 0.$
   (b) $u_{xx} - 2u_{xy} + 3u_{yy} + 2u_y + 6u = 0.$
   (c) $u_{xx} + 12u_{xy} + 36u_{yy} - u_x - 6u_y = 0.$
3. (a) $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} - 2yu_y = 0, \;\; x, y \neq 0.$
   (b) $2u_{xx} - 2u_{xy} + 5u_{yy} + u_x + u_y = 0.$
   (c) $25u_{xx} - 10u_{xy} + u_{yy} + u_y + 2u = 5y + 2x.$
4. (a) $2u_{xx} - 5u_{xy} + 3u_{yy} = 0.$
   (b) $u_{xx} - 2u_{xy} + 5u_{yy} + 3u_x + 1 = 0.$
   (c) $y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2u_{yy} = 0, x \neq 0, y \neq 0.$
5. (a) $xu_{xx} + (x - y)\, u_{xy} - yu_{yy} = 0, \quad x > 0, \;\; y > 0.$
   (b) $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 32u = 0.$
   (c) $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 9u_x + 9u_y - 9u = 0.$
6. (a) $2u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} + 7u_x + 4u_y - 2u = 0.$
   (b) $y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + 2x^2u_{yy} + yu_y = 0.$
   (c) $4u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} - 2u_y = 0.$
7. (a) $u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} - 3u_x - 15u_y + 27x = 0.$
   (b) $u_{xx} + 2u_{xy} + 2\left(1 - 2x + 2x^2\right) u_{yy} = 0.$

(c) $u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} + u_x + 3x = 0.$

8. (a) $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} + u_y = 0.$
   (b) $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} + \left(2 - \cos^2 x\right) u_{yy} = 0.$
   (c) $x^2 u_{xx} - 2x u_{xy} + u_{yy} = 0.$

9. (a) $4y u_{xx} + 2\,(y-1)\, u_{xy} - u_{yy} = 0.$
   (b) $u_{xx} - 6u_{xy} + 13u_{yy} = 0.$
   (c) $xy u_{xx} + 4x^2 y u_{xy} + 4x^3 y u_{yy} = u.$

10. (a) $3u_{xx} + 2u_{xy} - u_{yy} + u_x + u_y = 0.$
    (b) $5u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + 2u_x + u_y = 0.$
    (c) $x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} - 2y u_x + y e^{y/x} = 0.$

11. (a) $4u_{xx} - 8u_{xy} + 3u_{yy} + 2u_x - u_y = 0.$
    (b) $u_{xx} + 4u_{xy} + 10u_{yy} - 2y u_x + 42u_y + 2x + 2y = 0.$
    (c) $tg^2 x u_{xx} - 2y tg x u_{xy} + y^2 u_{yy} + tg^3 x u_x = 0.$

12. (a) $3u_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy} - 3u_x + u_y = 0.$
    (b) $y^2 u_{xx} + x^2 u_{yy} - \frac{y^2}{x} u_x - \frac{x^2}{y} u_y = 0.$
    (c) $u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} + u_x + 3u_y = 0.$

13. (a) $u_{xx} + 4u_{xy} + u_x = 0.$
    (b) $u_{xx} + y u_{yy} + \frac{1}{2} u_y + 4y u_x = 0, \quad y < 0.$
    (c) $u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} + u_x + 2u_y = 0.$

14. (a) $u_{xx} + y u_{yy} + \frac{1}{2} u_y + 4y u_x = 0, \quad y > 0.$
    (b) $5u_{xx} - 2u_{xy} + 2u_{yy} + 2u_y + 4y = 0.$
    (c) $u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} - u + 5 = 0.$

15. (a) $u_{xx} - 10u_{xy} + 9u_{yy} + u_x = 0.$
    (b) $u_{xx} + x u_{yy} = 0, \quad x > 0.$
    (c) $y^2 u_{xx} - 2y u_{xy} + u_{yy} - u_x - 6y = 0.$

16. (a) $u_{xx} + 5u_{xy} + 6u_{yy} = 0.$
    (b) $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 6u_x + 6u_y - 3u = x + y^2.$
    (c) $x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0.$

17. (a) $x^2 u_{xx} - 2xy u_{xy} - 3y^2 u_{yy} = 0 x \neq 0, y \neq 0.$
    (b) $u_{xx} + 4u_{yy} + u_x - 3u_y + u = x^2.$
    (c) $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + u_x - u_y + u = xy.$

18. (a) $y u_{xx} + x(2y-1) u_{xy} - 2x^2 u_{yy} = 0.$

(b) $5u_{xx} - 6u_{xy} + 2u_{yy} + u_y + u = 0.$

(c) $9u_{xx} - 6u_{xy} + u_{yy} + 3u_x - u_y = 0.$

19. (a) $u_{xx} + 8u_{xy} + 7u_{yy} + u_x + 2u_y + 3u + y = 0.$

(b) $u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} - 3u_x + u_y + u = 0.$

(c) $y^2u_{xx} - 2yu_{xy} + u_{yy} - u_x - 6y = 0.$

20. (a) $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0.$

(b) $2u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 3u_y + u = x^2.$

(c) $e^{2x}u_{xx} + 2e^{x+y}u_{xy} + e^{2y}u_{yy} = 0.$

21. (a) $xu_{xx} + (x - y)\, u_{xy} - yu_{yy} = 0,\ \ x > 0,\ y > 0.$

(b) $e^x u_{xx} + e^y u_{yy} = u..$

(c) $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + u_x - u_y = 0.$

22. (a) $u_{xx} - 4u_{xy} - 21u_{yy} + 2u_x - 3u_y + 5u = x^2.$

(b) $\left(1 + x^2\right)^2 u_{xx} + u_{yy} + 2x\left(1 + x^2\right) u_x = 0.$

(c) $u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} + 3u_x + 6u_y = 0.$

23. (a) $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0.$

(b) $u_{xx} - 2u_{xy} + 2u_{yy} = 0.$

(c) $2u_{xx} - 8u_{xy} + 8u_{yy} - u_x + 2u_y - 2u = 0.$

24. (a) $3u_{xx} + 10u_{xy} + 3u_{yy} + 4 = 0.$

(b) $u_{xx} - 6u_{xy} + 13u_{yy} = 0.$

(c) $y^2u_{xx} + 2yu_{xy} + u_{yy} = 0.$

25. (a) $u_{xx} - \left(1 + y^2\right)^2 u_{yy} - 2y\left(1 + y^2\right) u_y = 0.$

(b) $u_{xx} - 6u_{xy} + 10u_{yy} + u_x - 3u_y = 0.$

(c) $u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} + 3u_x + 6u_y = 0.$

7.1.2. 2 - өзіндік жұмыс. Типін анықтау канондық түрге келтіру, $n \geq 3$.

1. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} - 6u_{yz} + u_{zz} - u_{tt} - 2u_{yt} - 2u_{zt} + u = 0.$

2. $4u_{xx} - 4u_{xy} - u_{yy} - u_{yz} - 2u_{zz} + u_{tt} + 2u_{yt} + 2u_{zt} - 3u = 0.$

3. $u_{xx} + 4u_{yy} + 9u_{zz} + 4u_{xy} + 6u_{xz} + 12u_{yz} - 2u_x - 4u_y - 6u_z = 0.$

4. $u_{xy} - u_{xz} - u_{yz} = 0.$

5. $u_{xy} - u_{zz} + u_x - u_y = 0.$

6. $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 6u_{zz} = 0.$

7. $4u_{xx} - 4u_{xy} - 2u_{yz} + u_y + u_z = 0.$

8. $u_{xy} - u_{xz} + u_x + u_y - u_z = 0.$

9. $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 2u_{zz} = 0.$

10. $u_{xx} + 2u_{xy} - 4u_{xz} - 6u_{yz} - u_{zz} = 0.$

11. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 2u_{yz} + 2u_{yt} + 2u_{zz} + 3u_{tt} = 0.$

12. $u_{xy} - u_{xt} + u_{zz} - 2u_{zt} + 2u_{tt} = 0.$

13. $u_{xy} + u_{xz} + u_{xt} + u_{zt} = 0.$

14. $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} - 4u_{yz} + 2u_{yt} + u_{zz} = 0.$

15. $u_{xx} + 2u_{xz} - 2u_{xt} + u_{yy} + 2u_{yz} + 2u_{yt} + 2u_{zz} + 2u_{tt} = 0.$

16. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} = 0.$

17. $u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{xz} + 4u_{yy} + u_{zz} + 3u_x = 0.$

18. $u_{xy} + u_{xz} + u_{yz} - u_x + u_y = 0.$

19. $3u_{yy} - 2u_{xy} - 2u_{yz} + 4u = 0.$

20. $u_{xx} + 4u_{yy} + u_{zz} + 4u_{xy} + 2u_{xz} + 4u_{yz} + 2u = 0.$

21. $u_{xx} + 4u_{yy} + 9u_{zz} + 4u_{xy} + 6u_{xz} + 12u_{yz} - 2u_x - 4u_y = 0.$

22. $u_{xx} + 4u_{yy} - 3u_{zz} + 4u_{xy} + 2u_{xz} + 2u_{yz} = 0.$

23. $u_{xx} - 3u_{yy} + u_{zz} + 2u_{xy} + 4u_{xz} - 4u_{yz} = 0.$

24. $u_{xx} - 3u_{zz} - 2u_{xy} + 2u_{xz} - 6u_{yz} = 0.$

25. $u_{xy} + u_{xz} + u_{xt} + u_{yz} + u_{yt} + 2u_{zt} = 0.$

7.1.3. 3 - өзіндік жұмыс. Сипаттауыштар әдісі. Гиперболалық типті теңдеулер үшін жалпылама Коши есебі

1. $2xyu_{xy} - 3yu_{yy} + 3u_y = 0,$
   $u\,|_{y=1} = x^2 - 2, \quad u_y\,|_{y=1} = x^3.$

2. $3u_{xx} + 2u_{xy} - u_{yy} + u_x + u_y = 0,$
   $u\,|_{x=0} = 2y, \quad u_x\,|_{x=0} = 4y.$

3. $4u_{xx} - 8u_{xy} + 3u_{yy} + 2u_x - u_y = 0,$
   $u\,|_{y=0} = 3x\ , \quad u_y\,|_{y=0} = 2x + 6.$

4. $5u_{xx} + 6u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 0,$
   $u\,|_{x=0} = 2y\ , \quad u_x\,|_{x=0} = 5y.$

5. $3u_{xx} + 5u_{xy} - 2u_{yy} + 7\left(u_x + 2u_y\right) = 0,$
$u\left.\right|_{x=0} = 1, \quad u_x\left.\right|_{x=0} = 3y.$

6. $u_{xx} + 2\cos x \cdot u_{xy} - \sin^2 x \cdot u_{yy} - \sin x \cdot u_y = 0,$
$u\left(x, \sin x\right) = 3x^2, \quad u_y\left(x, \sin x\right) = x.$

7. $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0,$
$u\left(x, 0\right) = 3x^2, \quad u_y\left(x, 0\right) = 0.$

8. $u_{xx} + 4u_{xy} - 5u_{yy} + u_x - u_y = 0,$
$u\left(x, 0\right) = 2x, \quad u_y\left(x, 0\right) = 1.$

9. $\left(\sin^2 y - 4\right) u_{xx} - 2\sin y \cdot u_{xy} + u_{yy} - \cos y \cdot u_x = 0,$
$u\left(\cos y, y\right) = \cos y, \quad u_x\left(\cos y, y\right) = \sin y.$

10. $4xu_{xy} - yu_{yy} + 3u_y = 0,$
$u\left.\right|_{y=1} = 4x^3, \quad u_y\left.\right|_{y=1} = 8x.$

11. $2xu_{xy} - yu_{yy} - 3u_y = 0,$
$u\left.\right|_{y=1} = x^4, \quad u_y\left.\right|_{y=1} = 3x^3.$

12. $xu_{xx} - yu_{xy} + 4u_x = 0,$
$u\left.\right|_{x=1} = 3y^4, \quad u_x\left.\right|_{y=0} = 2y^5.$

13. $xu_{xy} - 3yu_{yy} - 5u_y = 0,$
$u\left.\right|_{y=1} = 4x^4, \quad u_y\left.\right|_{y=1} = 2x^8.$

14. $xu_{xx} + yu_{xy} = 0,$
$u\left.\right|_{x=1} = 2y + 1, \quad u_x\left.\right|_{x=1} = y.$

15. $4xu_{xy} - yu_{yy} + 3u_y = 0,$
$u\left.\right|_{y=1} = x^2 + 1, \quad u_y\left.\right|_{y=1} = 4.$

16. $xu_{xx} - 6u_{xy} + 5u_{yy} = 0,$
$u\left.\right|_{y=x} = 2\sin x, \quad u_y\left.\right|_{y=x} = 2\cos x.$

17. $u_{xx} - u_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0,$
$u\left.\right|_{y=0} = x, \quad u_y\left.\right|_{y=0} = 0, \quad |x| < \infty.$

18. $u_{xx} - u_{yy} - 2u_x - 2u_y = 4;$
$u\left.\right|_{x=0} = -y, \quad u_x\left.\right|_{x=0} = y - 1, \quad |y| < \infty.$

19. $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 2;$
$u\left.\right|_{y=0} = 0, \quad u_y\left.\right|_{y=0} = x + \cos x, \quad |x| < \infty.$

20. $x^2u_{xx} - 3xyu_{xy} + 2y^2u_{yy} + 3yu_y = 0,$
$u\left.\right|_{y=1} = 1 + 2x^2, \quad u_y\left.\right|_{y=1} = 4x^2.$

21. $u_{xx} - 2\sin xu_{xy} - \left(3 + \cos^2 x\right) u_{yy} - \cos xu_y = 0,$
$u\left.\right|_{y=\cos x} = \sin x, \quad u_y\left.\right|_{y=\cos x} = \dfrac{1}{2}e^x.$

22. $\begin{array}{l} x^2 u_{xx} - 3xyu_{xy} + 2y^2 u_{yy} + 3yu_y = 0, \\ u\,|_{y=1} = 2x, \quad u_y\,|_{y=1} = x. \end{array}$

23. $\begin{array}{l} 3x^2 u_{xx} - 16xyu_{xy} + 16y^2 u_{yy} + 15xu_x = 0, \\ u\,\Big|_{x=1} = 2y^2, \quad u_x\,|_{x=1} = \dfrac{20}{3} y^2. \end{array}$

24. $\begin{array}{l} u_{xx} + 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} + u_x + (\sin x + \cos x + 1)\, u_y = 0, \\ u\,|_{y=-\cos x} = 1 + 2\sin x, \quad u_y\,|_{y=-\cos x} = \sin x. \end{array}$

25. $\begin{array}{l} u_{xx} + 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} + \cos x u_y = 0, \\ u\,|_{y=-\cos x} = 1 + \cos x, \quad u_y\,|_{y=-\cos x} = 0. \end{array}$

7.1.4. 4 - өзіндік жұмыс. Гурса есебі

Төмендегі есептердегі $\varphi(x),\ \psi(x) \in C^2(x > 0) \cap C(x \geq 0)$ берілген тегіс функциялар.

1. $\begin{cases} u_{xy} + u_x = x, \quad x > 0,\ y > 0; \\ u|_{x=0} = y^2,\ u|_{y=0} = x^2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} u_{xy} + u_y = 1, \quad x > 0,\ y > 0; \\ u|_{x=0} = \varphi(y),\ u|_{y=0} = \psi(x), \quad \varphi(0) = \psi(0). \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2u_{xx} + u_{xy} - u_{yy} + u_x + u_y = 0, \ -\frac{1}{2}x < y < x,\ x > 0; \\ u|_{y=x} = 1 + 3x,\ u|_{y=-x/2} = 1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} u_{xx} + 6u_{xy} + 5u_{yy} = 0, \quad x < y < 5x,\ x > 0; \\ u|_{y=x} = \varphi(y),\ u|_{y=5x} = \psi(x),\ \varphi(0) = \psi(0). \end{cases}$

5. $\begin{cases} u_{xx} + yu_{yy} + \frac{1}{2}u_y = 0, \quad -\frac{1}{4}\,x^2 < y < 0,\ x > 0; \\ u|_{y=0} = 0,\ u|_{y=-x^2/4} = x^2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} u_{xy} - e^x u_{yy} = 0, \quad y > e^{-x},\ x > 0; \\ u|_{x=0} = y^2,\ u|_{y=-e^x} = 1 + x^2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} yu_{xx} + (x - y)\, u_{xy} - xu_{yy} - u_x + u_y = 0, \quad 0 < y < x,\ x > 0; \\ u|_{y=0} = 0,\ u|_{y=x} = 4x^4. \end{cases}$

8. $\begin{cases} xu_{xx} + (x - y)\, u_{xy} - yu_{yy} = 0, \quad 0 < y < x,\ x > 0; \\ u|_{y=0} = 0,\ u|_{y=x} = x. \end{cases}$

9. $\begin{cases} y^2 u_{xx} + u_{xy} = 0, \quad y^3 - 8 < 3x < y^3,\ 0 < y < 2; \\ u|_{y=2} = 3x + 8,\ u|_{3x=y^3} = 2y^3 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0, \quad y > x,\ x > 1; \\ u|_{y=1} = 1,\ u|_{y=x} = x. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} + xu_x - yu_y = 0, \quad \frac{1}{x} < y < x,\ x > 1; \\ u|_{y=x} = x,\ u|_{y=1/x} = 1 + \ln x. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} - y^2u_{yy} = 0, \quad x < y < \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, 0 < x < 1; \\ u|_{y=x} = y, \ u|_{xy^3=1} = y^2. \end{cases}$

13. $\begin{cases} u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0, \quad |y - \cos x| < x, \ x > 0; \\ u|_{y=x+\cos x} = \cos x, \ u|_{y=-x+\cos x} = \cos x. \end{cases}$

14. $\begin{cases} u_{xy} = 0, \quad x^2 < y < 2x^2, \ x > 0; \\ u|_{y=x^2} = x^4, \quad u|_{y=2x^2} = x^2. \end{cases}$

15. $\begin{cases} u_{xy} = 0, \quad x^4 < y < x^2, \ 0 < x < 1; \\ u|_{y=x^2} = 0, \quad u|_{y=x^4} = x\,(1-x)\,. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2u_{xx} - 2u_{yy} + u_x + u_y = 0, \ y > |x|\,; \\ u\,(x,y)\,|_{y=x} = 1, \ \ u\,(x,y)\,|_{y=-x} = (x+1)e^x. \end{cases}$

17. $\begin{cases} u_{yy} = u_{xx}, \ y > |x|\,; \\ u|_{y=x} = \varphi(x), \ 0 \le x \le b, \ u|_{y=-x} = \psi(x), \ \ -a \le x \le 0, \\ \varphi(0) = \psi(0), \ 0 < a, b < \infty. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ u\,(x,y)\,|_{y=-x} = \varphi\,(x)\,, \quad u\,(x,y)\,|_{y=x} = \psi\,(x)\,, \quad \varphi\,(0) = \psi\,(0)\,. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \\ u\,(x,y)\,|_{y=x} = \varphi\,(x)\,, \quad u\,(x,y)\,|_{y=5x} = \psi\,(x)\,, \quad \varphi\,(0) = \psi\,(0)\,. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \\ u\,(x,y)\,|_{y=5x+3} = \varphi\,(x)\,, \quad u\,(x,y)\,|_{y=x-1} = \psi\,(x) \quad \varphi\,(-1) = \psi\,(-1)\,. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 8\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \\ u\,(x,y)\,|_{y=-4x} = \varphi\,(x)\,, \quad u\,(x,y)\,|_{y=-2x-2} = \psi\,(x)\,, \quad \varphi\,(1) = \psi\,(1)\,. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \\ u\,(x,y)\,|_{y=x-1} = \varphi\,(x)\,, \quad u\,(x,y)\,|_{y=-\frac{x+1}{3}} = \psi\,(x)\,, \quad \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \psi\left(\frac{1}{2}\right). \end{cases}$

23. $\begin{cases} 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 8\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \\ u\,(x,y)\,|_{y=-\frac{x+1}{2}} = \varphi\,(x)\,, \quad u\,(x,y)\,|_{y=-\frac{3x+2}{2}} = \psi\,(x)\,, \quad \varphi\left(-\frac{1}{2}\right) = \psi\left(-\frac{1}{2}\right). \end{cases}$

24. $\begin{cases} 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \\ u\,(x,y)\,|_{y=-\frac{x+2}{3}} = \varphi\,(x)\,, \quad u\,(x,y)\,|_{y=2x-1} = \psi\,(x)\,, \quad \varphi\left(\frac{1}{7}\right) = \psi\left(\frac{1}{7}\right). \end{cases}$

25. $\begin{cases} 25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \\ u\,(x,y)\,|_{y=\frac{2x-4}{5}} = \varphi\,(x)\,, \quad u\,(x,y)\,|_{y=-\frac{x+3}{5}} = \psi\,(x)\,, \quad \varphi\left(\frac{1}{3}\right) = \psi\left(\frac{1}{3}\right). \end{cases}$

7.1.5. 5 - өзіндік жұмыс. Толқындық теңдеуі үшін Коши есебі, $n = 1$.

1. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + x\sin t, \;\; x \in R, \;\; t > 0, \\ u(x,0) = \sin x, \;\; u_t(x,0) = \cos x, \quad x \in R. \end{cases}$

2. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + e^x, \;\; x \in R, \;\; t > 0, \\ u(x,0) = \sin x, \;\; u_t(x,0) = x + \cos x, \quad x \in R. \end{cases}$

3. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 12x^2, \;\; x \in R, \;\; t > 0, \\ u(x,0) = e^{-x}, \;\; u_t(x,0) = 3, \quad x \in R. \end{cases}$

4. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \cos x, \;\; x \in R, \;\; t > 0, \\ u(x,0) = \sin x, \;\; u_t(x,0) = 1 + x, \quad x \in R. \end{cases}$

5. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 6xt, \;\; x \in R, \;\; t > 0, \\ u(x,0) = x, \;\; u_t(x,0) = \sin x, \quad x \in R. \end{cases}$

6. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 4\sin 2t, \;\; x \in R, \;\; t > 0, \\ u(x,0) = \cos x, \;\; u_t(x,0) = \sin x, \quad x \in R. \end{cases}$

7. $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + 6, \;\; x \in R, \;\; t > 0, \\ u(x,0) = x^2, \;\; u_t(x,0) = 4x, \quad x \in R. \end{cases}$

8. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + x\sin t, \;\; x \in R, \;\; t > 0, \\ u(x,0) = \sin x, \;\; u_t(x,0) = \cos x, \quad x \in R. \end{cases}$

9. $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin \omega t, \;\; x \in R, \;\; t > 0, \\ u(x,0) = 0, \;\; u_t(x,0) = 0, \quad x \in R. \end{cases}$

10. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 6xt, \;\; x \in R, \;\; t > 0, \\ u(x,0) = x, \;\; u_t(x,0) = \sin x, \quad x \in R. \end{cases}$

11. $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin \omega x, \;\; x \in R, \;\; t > 0, \\ u(x,0) = 0, \;\; u_t(x,0) = 0, \quad x \in R. \end{cases}$

12. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 3e^{-t}, \;\; x \in R, \;\; t > 0, \\ u(x,0) = \sin x, \;\; u_t(x,0) = \cos x, \quad x \in R. \end{cases}$

13. $\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx} + \sin x, \;\; x \in R, \;\; t > 0, \\ u(x,0) = 1, \;\; u_t(x,0) = 1, \quad x \in R. \end{cases}$

14. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 4\sin 2t, \;\; x \in R, \;\; t > 0, \\ u(x,0) = \cos x, \;\; u_t(x,0) = \sin x, \quad x \in R. \end{cases}$

15. $\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + \cos x, \\ u(x,0) = \sin x, \qquad u_t(x,0) = 1 + x. \end{cases}$

16. $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + x + t, \\ u(x,0) = e^x, \quad u_t(x,0) = 0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + t\ln t, \\ u(x,0) = 3^x, \quad u_t(x,0) = 0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + x^2 + t^2, \\ u(x,0) = x^m, \ u_t(x,0) = 0, \ \ m = 1, 2, ... \end{cases}$

19. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + x^2, \\ u(x,0) = \cos x, \ \ u_t(x,0) = \cos x. \end{cases}$

20. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \cos(x+t), \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 2^x. \end{cases}$

21. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \sin t, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \left(1 + x^2\right)^{-1}. \end{cases}$

22. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 6, \qquad x \in R^1, \quad t \in (0, +\infty), \\ u(x,0) = x^2, \qquad u_t(x,0) = 4x, \quad x \in R^1. \end{cases}$

23. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + xt, \qquad x \in R^1, \quad t \in (0, +\infty), \\ u(x,0) = x^2, \qquad u_t(x,0) = x, \quad x \in R^1. \end{cases}$

24. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \sin x, \qquad x \in R^1, \quad t \in (0, +\infty), \\ u(x,0) = \sin x, \qquad u_t(x,0) = 0, \quad x \in R^1. \end{cases}$

25. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + e^x, \qquad x \in R^1, \quad t \in (0, +\infty), \\ u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = x + \cos x, \quad x \in R^1. \end{cases}$

7.1.6. 6 - өзіндік жұмыс. Толқындық теңдеу үшін Коши есебі, $n \geq 2$.

1. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, \\ u|_{t=0} = e^{-x^2} + arctgy, \quad u_t|_{t=0} = \cos x \sin y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} u_{tt} = \Delta u + 3\left(xy^2 - x^2 y + z^2(x-y)\right)t; \\ u|_{t=0} = x^2 - y^2, \quad u_t|_{t=0} = \sin x \cos(y + 3z). \end{cases}$

3. $\begin{cases} u_{tt} = \Delta u(x_1, x_2, x_3), \ \ R^3 \times R_+ \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t\Big|_{t=0} = \frac{1}{1+(x_1+x_2+x_3)^2}, \quad x \in R^3. \end{cases}$

4. $\begin{cases} u_{tt} = 4\Delta u(x,y,z,t), \ \ (x,y,z) \in R^3, \ \ t > 0, \\ u(x,y,z,0) = \sin x + e^{2z}, \ \ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} u_{tt} = 4\Delta u(x,y,z,t), \ \ (x,y,z) \in R^3, \ \ t > 0, \\ u(x,y,z,0) = y^2 z^2, \ \ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$

6. $u_{tt} = \Delta u + \cos x \sin y e^z; \quad u|_{t=0} = x^2 e^{y+z}, \quad u_t|_{t=0} = \sin x e^{y+z}.$

7. $u_{tt} = \Delta u + xe^t \cos(3y + 4z); \quad u|_{t=0} = xy \cos z, \quad u_t|_{t=0} = yze^x.$

8. $\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u\,(x,y,t) + 1, \ (x,y) \in R^2, \ \ t > 0, \\ u\,(x,0) = 1, \ \ u_t\,(x,0) = 1, \ \ (x,y) \in R^2. \end{cases}$

9. $\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u\,(x,y,t) + e^{-t} r^2, \ (x,y) \in R^2, \ \ t > 0, \\ u\,(x,0) = 1 + r^2, \ \ u_t\,(x,0) = 0, \ \ (x,y) \in R^2. \end{cases}$

10. $u_{tt} = \Delta u; \quad u\left|_{t=0} = x^2 + y^2 + z^2, \qquad u_t\right|_{t=0} = xy.$

11. $u_{tt} = \Delta u + 2; \quad u\,|_{t=0} = x, \qquad u_t\,|_{t=0} = y.$

12. $u_{tt} = \Delta u + 6xyt; \quad u\left|_{t=0} = x^2 - y^2, \qquad u_t\right|_{t=0} = xy.$

13. $\begin{cases} u_{tt} = \Delta u + x^3 - 3xy^2; \\ u\,|_{t=0} = e^x \cos y, \qquad u_t\,|_{t=0} = e^y \sin x. \end{cases}$

14. $u_{tt} = \Delta u + t \sin y; \quad u\left|_{t=0} = x^2, \qquad u_t\right|_{t=0} = \sin y.$

15. $u_{tt} = 2\Delta u; \quad u\left|_{t=0} = 2x^2 - y^2, \qquad u_t\right|_{t=0} = 2x^2 + y^2.$

16. $u_{tt} = 3\Delta u + x^3 + y^3; \quad u\left|_{t=0} = x^2, \qquad u_t\right|_{t=0} = y^2.$

17. $u_{tt} = \Delta u + e^{3x+4y}; \quad u\,|_{t=0} = u_t\left|_{t=0} = e^{3x+4y}.\right.$

18. $u_{tt} = a^2 \Delta u + e^t \left(x^2 - y^2\right); \quad u\,|_{t=0} = u_t\,|_{t=0} = 0.$

19. $u_{tt} = \Delta u; \quad u\,|_{t=0} = x^2 y, \qquad u_t\left|_{t=0} = xy^2.\right.$

20. $u_{tt} = \Delta u + 2xyz; \quad u\left|_{t=0} = x^2 + y^2 - 2z^2, \qquad u_t\right|_{t=0} = 1.$

21. $u_{tt} = 8\Delta u + t^2 x^2; \quad u\left|_{t=0} = y^2, \qquad u_t\right|_{t=0} = z^2.$

22. $u_{tt} = 3\Delta u + 6r^2; \quad u\left|_{t=0} = x^2 y^2 z^2, \qquad r^2 = x^2 + y^2 + z^2.\right.$

23. $\begin{cases} u_{tt} = \Delta u + 6te^{x\sqrt{2}} \sin y \cos z; \quad u\left|_{t=0} = e^{x+y} \cos z\sqrt{2}.\right. \\ u_t\left|_{t=0} = e^{3y+4z} \sin 5x.\right. \end{cases}$

24. $\begin{cases} u_{tt} = \Delta u + te^{5x} \sin(3y) \cos(4z), \quad -\infty < x,y,z < +\infty \quad t > 0, \\ u\left|_{t=0} = e^{6x+8y} \cos(10z), \quad -\infty < x,y,z < +\infty\right. \\ u_t\left|_{t=0} = e^{3y+4x} \sin(5x), \quad -\infty < x,y,z < +\infty.\right. \end{cases}$

25. $\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad -\infty < x,y < +\infty \ \ t > 0, \\ u\,|_{t=0} = \cos(bx + cy), \quad -\infty < x,y < +\infty, \\ u_t\,|_{t=0} = \sin(bx + cy), \quad -\infty < x,y < +\infty. \end{cases}$

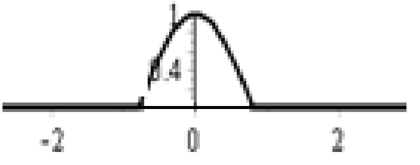
7.1.7. 7 - өзіндік жұмыс. Шешімінің физикалық интерпретациясы

Толқындық теңдеуі үшін Коши есебі берілген.

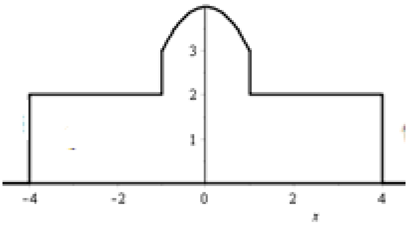
$$\begin{aligned} &u_{tt} = a^2 u_{xx}(x,t), \;\; x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)\,, \;\; t > 0, \\ &u\,(x,0) = \varphi\,(x)\,, \;\; u_t\,(x,0) = \psi\,(x)\,, \;\; x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Даламбер формуласын қолданып, Maple (MatLab, Mathematica) бағдарласы көмегімен шешімнің әртүрлі уақыт мезетіндегі графигін салыңыз, егер:
а) бастапқы ауытқу профилі $\varphi(x) = f(x)$, ал $\psi \equiv 0$ болса;
ә) $\varphi \equiv 0$, ал бастапқы жылдамдық профилі $\psi = f(x)$ болса, мұндағы $f(x)$:

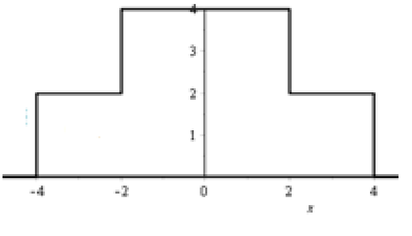
1. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{\pi}{4}, \\ \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right), & -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}, \\ 0, & x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$



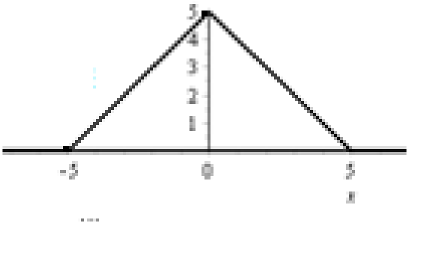
2. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < -4, \\ 2, & -4 \le x < -1, \\ -x^2 + 4, & -1 \le x \le 1, \\ 2, & 1 < x \le 4, \\ 0, & x > 4. \end{cases}$



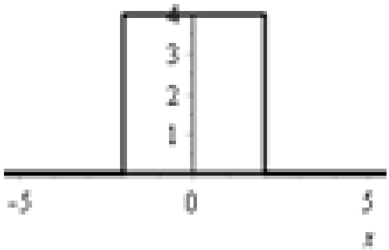
3. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < -4, \\ 2, & -4 \le x < -2, \\ 4, & -2 \le x \le 2, \\ 2, & 2 < x \le 4, \\ 0, & x > 4. \end{cases}$



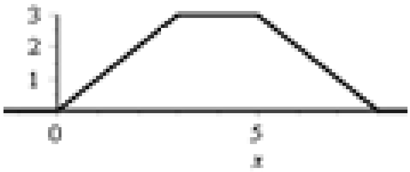
4. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < -5. \\ 5 - |x|, & -5 \le x \le 5, \\ 0, & x > 5 \end{cases}$



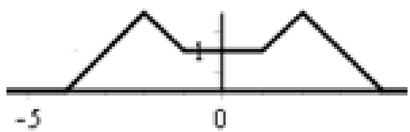
5. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < -2, \\ 4, & -2 \le x \le 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$



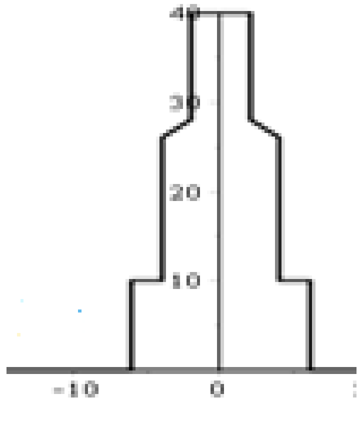
6. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \le x < 3, \\ 3, & 3 \le x \le 5, \\ -x+8, & 5 < x \le 8, \\ 0, & x > 8. \end{cases}$



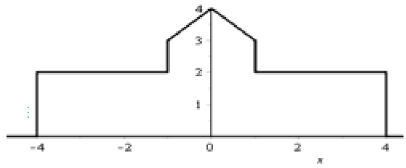
7. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < -4, \\ x+4, & -4 \le x < -2, \\ -x, & -2 \le x < -1, \\ 1, & -1 \le x < 1, \\ x, & 1 \le x < 2, \\ -x+4, & 2 \le x \le 4, \\ 0, & x > 4. \end{cases}$



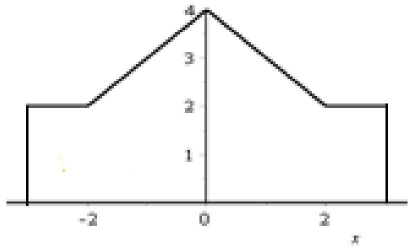
8. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < -6, \\ 10, & -6 \le x \le -4, \\ x+30, & -4 \le x \le -2, \\ 40, & -2 \le x \le 2, \\ -x+30, & 2 \le x \le 4, \\ 10, & 4 \le x \le 6, \\ 0, & x > 6. \end{cases}$



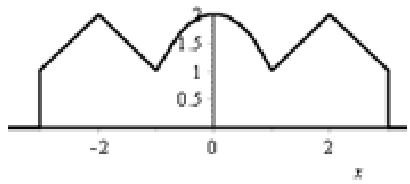
9. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < -4, \\ 2, & -4 < x < -1, \\ -|x| + 4, & -1 \le x \le 1, \\ 2, & 1 < x \le 4, \\ 0, & x > 4. \end{cases}$



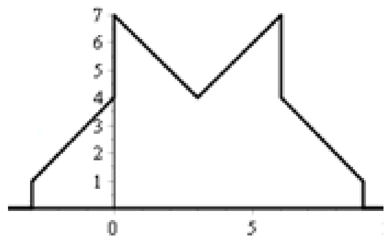
10. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < -4, \\ 2, & -4 < x < -2, \\ -|x| + 4, & -2 < x < 2, \\ 2, & 2 < x < 4, \\ 0, & x > 4. \end{cases}$



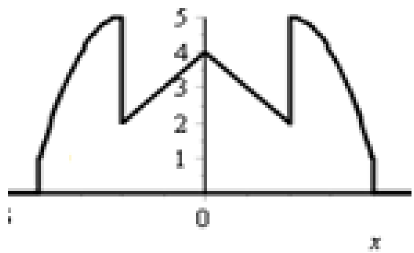
11. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < -3 \\ x + 4, & -3 \le x \le -2 \\ -x, & -2 \le x \le -1 \\ -x^2 + 2, & -1 \le x \le 1 \\ x, & 1 \le x \le 2 \\ -x + 4, & 2 \le x \le 3 \\ 0, & x > 3. \end{cases}$



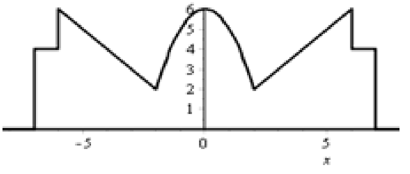
12. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < -3 \\ x + 4, & -3 \le x \le 0 \\ -x + 7, & 0 \le x \le 3 \\ x + 1, & 3 \le x \le 6 \\ -x + 10, & 6 \le x \le 9 \\ 0, & x > 9. \end{cases}$



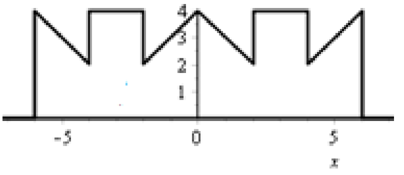
13. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < -4, \\ -x^2 + 1 - 4x, & -4 \le x \le -2, \\ -|x| + 4, & -2 \le x \le 2, \\ -x^2 + 1 + 4x, & 2 \le x \le 4, \\ 0, & x > 4. \end{cases}$



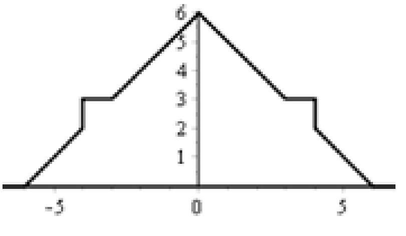
14. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < -7, \\ 4, & -7 \leq x \leq -6, \\ -x, & 6 \leq x \leq -2, \\ -x^2 + 6, & -2 \leq x \leq 2, \\ x, & 2 \leq x \leq 6, \\ 4, & 6 \leq x \leq 7, \\ 0, & x > 7. \end{cases}$



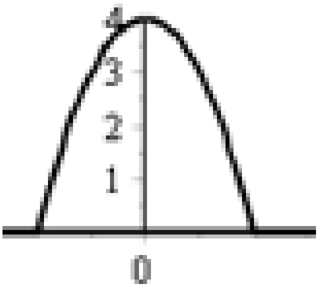
15. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < -6 \\ -x - 2, & -6 \leq x \leq -4 \\ 4, & -4 \leq x \leq -2 \\ x + 4, & 2 \leq x \leq 0 \\ -x + 4, & 0 \leq x \leq 2, \\ 4, & 2 \leq x \leq 4 \\ x - 2, & 4 \leq x \leq 6 \\ 0, & x > 6. \end{cases}$



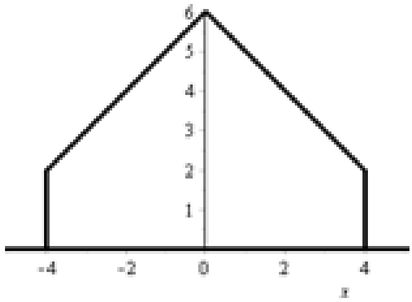
16. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < -6, \\ x + 6, & -6 \leq x \leq -4, \\ 3, & -4 \leq x \leq -3, \\ x + 6, & -3 \leq x \leq 0, \\ -x + 6, & 0 \leq x \leq 3, \\ 3, & 3 \leq x \leq 4, \\ -x + 6, & 4 \leq x \leq 6, \\ 0, & x > 6. \end{cases}$



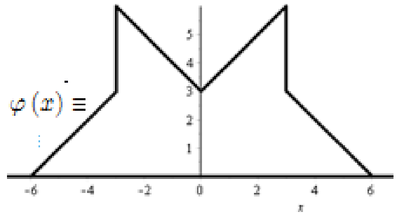
17. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < -2, \\ -x^2 + 4, & -2 \leq x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$



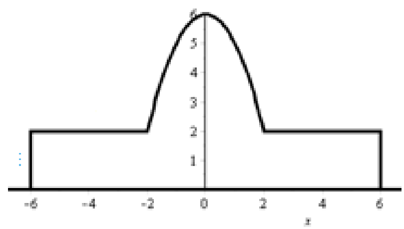
18. $$f(x)=\begin{cases} 0, & x<-4, \\ x+6, & -4\le x\le 0, \\ -x+6, & 0\le x\le 4, \\ 0, & x>4. \end{cases}$$



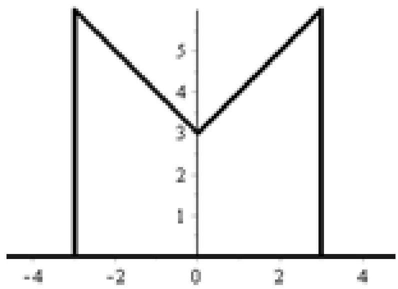
19. $$f(x)=\begin{cases} 0, & x<-6, \\ x+6, & -6\le x<3, \\ |x|+3, & -3\le x\le 3, \\ -x+6, & 3<x\le 6, \\ 0, & x>6. \end{cases}$$



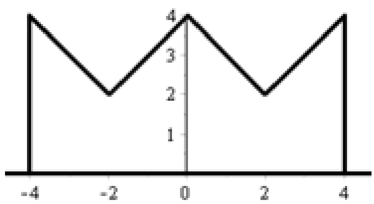
20. $$f(x)=\begin{cases} 0, & x<-6, \\ 2, & -6\le x<-2, \\ -x^2+6, & -2\le x\le 2, \\ 2, & 2<x\le 6, \\ 0, & x>6. \end{cases}$$



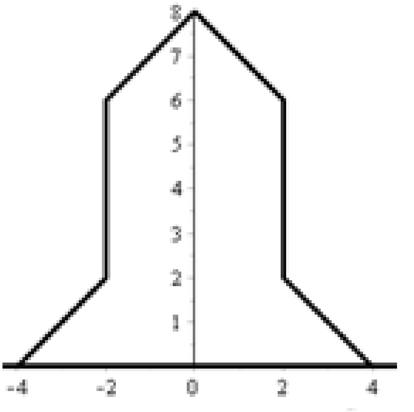
21. $$f(x)=\begin{cases} 0, & x<-3, \\ |x|+3, & -3\le x\le 3, \\ 0, & x>3. \end{cases}$$



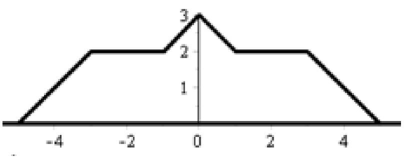
22. $$f(x)=\begin{cases} 0, & x<-4 \\ -x, & -4\le x\le -2 \\ -|x|+4, & -2\le x\le 2 \\ x, & 2\le x\le 4 \\ 0, & x>4. \end{cases}$$



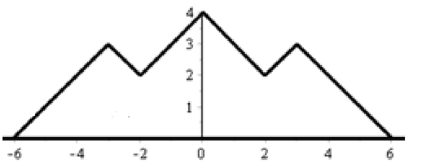
23. $f(x)=\begin{cases} 0, & x<-4, \\ x+4, & -4\le x\le -2, \\ -|x|+8, & -2\le x\le 2, \\ -x+4, & 2\le x\le 4, \\ 0, & x>4. \end{cases}$



24. $f(x)=\begin{cases} 0, & x<-5, \\ x+5, & -5\le x\le -3, \\ 2, & -3\le x\le -1, \\ -|x|+3, & -1\le x\le 1, \\ 2, & 1\le x\le 3, \\ -x+5, & 3\le x\le 5, \\ 0, & x>5. \end{cases}$



25. $f(x)=\begin{cases} 0, & x<-6, \\ x+6, & -6\le x\le -3, \\ -x, & -3\le x\le -2, \\ -|x|+4, & -2\le x\le 2, \\ x, & 2\le x\le 3, \\ -x+6, & 3\le x\le 6, \\ 0, & x>6. \end{cases}$



7.1.8. 8 - өзіндік жұмыс. Жылуөткізгіштік теңдеуі үшін Коши есебі, $n=1$.

1. $u_t=u_{xx}+xe^{-4t},\ x\in(-\infty,\infty),\ t>0;\quad u(x,0)=\sin 2x,\ x\in(-\infty,\infty).$

2. $u_t=4u_{xx}+t+e^t,\ x\in(-\infty,\infty),\ t>0;\quad u(x,0)=2,\ x\in(-\infty,\infty).$

3. $u_t=u_{xx}+t^2 chx,\ x\in(-\infty,\infty),\ t>0;\quad u(x,0)=chx,\ x\in(-\infty,\infty).$

4. $u_t=4u_{xx}+2xt+1,\ x\in(-\infty,\infty),\ t>0;\quad u(x,0)=e^{-2x},\ x\in(-\infty,\infty).$

5. $u_t=u_{xx}+e^{-t}\cos x,\ x\in(-\infty,\infty),\ t>0;\ u(x,0)=\cos x,\ x\in(-\infty,\infty).$

6. $u_t=u_{xx}+e^t\sin x,\ x\in(-\infty,\infty),\ t>0;\quad u(x,0)=\sin x,\ x\in(-\infty,\infty).$

7. $u_t=4u_{xx}+2u,\ x\in(-\infty,\infty),\ t>0;\quad u(x,0)=e^{-x}+x^4,\ x\in(-\infty,\infty).$

8. $4u_t=u_{xx},\ x\in(-\infty,\infty),\ t>0;\quad u(x,0)=e^{2x-x^2},\ x\in(-\infty,\infty).$

9. $u_t = 4u_{xx} + tx^2,\ x \in (-\infty, \infty),\ t > 0; \quad u(x,0) = e^x \cos x,\ x \in (-\infty, \infty).$

10. $4u_t = u_{xx},\ x \in (-\infty, \infty),\ t > 0; \quad u(x,0) = \sin x e^{-x^2},\ x \in (-\infty, \infty).$

11. $u_t = u_{xx} + te^{-x},\ x \in (-\infty, \infty),\ t > 0; \quad u(x,0) = \sin^2 x,\ x \in (-\infty, \infty).$

12. $u_t = 9u_{xx} + e^{-t},\ x \in (-\infty, \infty),\ t > 0; \quad u(x,0) = 1,\ x \in (-\infty, \infty).$

13. $u_t = 9u_{xx} + t + x^2,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0; \quad u(x,0) = e^{-x} \sin x,\ x \in (-\infty, \infty).$

14. $u_t = u_{xx} + xe^{-t},\ x \in \mathbb{R},\ t > 0; \quad u(x,0) = x^2 + x - 1,\ x \in \mathbb{R}.$

15. $u_t = u_{xx} + 3t^2,\ x \in (-\infty, \infty),\ t > 0; \quad u(x,0) = \sin x,\ x \in (-\infty, \infty).$

16. $u_t = u_{xx} + e^t \sin x,\ x \in (-\infty, \infty),\ t > 0; \quad u(x,0) = \sin x,\ x \in (-\infty, \infty).$

17. $u_t = 2u_{xx},\ x \in (-\infty, \infty),\ t > 0; \quad u(x,0) = x^2 + \cos 2x,\ x \in (-\infty, \infty).$

18. $u_t = a^2 u_{xx} - hu + b,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0; \quad u(x,0) = e^x,\ a, b, h = const,\ x \in \mathbb{R}.$

19. $u_t = 5u_{xx},\ x \in (-\infty, \infty),\ t > 0; \quad u(x,0) = x + e^{2x} \sin 2x,\ x \in (-\infty, \infty).$

20. $u_t = a^2 u_{xx} - hu,\ x \in (-\infty, \infty),\ t > 0; \quad u(x,0) = e^x,\ a, h = const,\ x \in \mathbb{R}.$

21. $u_t = u_{xx} + 2u_x + u,\ x \in (-\infty, \infty),\ t > 0; \quad u(x,0) = e^{-3x},\ x \in (-\infty, \infty).$

22. $u_t = u_{xx} + x \cos x,\ x \in (-\infty, \infty),\ t > 0; \quad u(x,0) = x \cos x,\ x \in \mathbb{R}.$

23. $u_t = u_{xx},\ x \in (-\infty, \infty),\ t > 0; \quad u(x,0) = xe^{-x^2},\ x \in (-\infty, \infty).$

24. $u_t = u_{xx} + \sin t,\ x \in (-\infty, \infty),\ t > 0; \quad u(x,0) = e^{-x^2},\ x \in (-\infty, \infty).$

25. $u_t = u_{xx} - 2u + 4,\ x \in (-\infty, \infty),\ t > 0; \quad u(x,0) = e^x,\ x \in (-\infty, \infty).$

7.1.9. 9 - өзіндік жұмыс. Жылуөткізгіштік теңдеуі үшін Коши есебі, $n \geq 2$.

1. $u_t = \Delta u + 3xyt,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ t > 0; \qquad u|_{t=0} = \sin x \cos y,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$

2. $u_t = \Delta u + (x^2 + y^2)e^{-t},\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ t > 0;\ u|_{t=0} = xy \sin z,\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$

3. $8\, u_t = \Delta u + 1,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ t > 0; \qquad u|_{t=0} = e^{-(x-y)^2},\ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$

4. $2\, u_t = \Delta u,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ t > 0; \qquad u|_{t=0} = \cos xy,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$

5. $u_t = 9\Delta u + y^2 te^{-x} \sin z,\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ t > 0; \quad u|_{t=0} = 0,\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$

6. $4u_t = \Delta u + \sin 2z,\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ t > 0;$
   $u|_{t=0} = \dfrac{1}{4} \sin 2z + e^{-x^2} \cos 2y,\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$

7. $u_t = \Delta u + \cos(x - y + z),\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ t > 0;$
   $u|_{t=0} = e^{-(x+y-z)^2},\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$

8. $u_t = 9\Delta u + 4u,\ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ t > 0; \quad u\,|_{t=0} = \cos 2x + y^2,\ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$

9. $u_t = \Delta u,\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ t > 0; \quad u\,|_{t=0} = e^{-x^2} sh3y \cos 5z,\ \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$

10. $u_t = 4\Delta u,\ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ t > 0; \quad u\,|_{t=0} = e^{-2x} (\sin 2y + 2y)\,,\ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$

11. $u_t = \Delta u + e^{y-z} \sin x,\ \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ t > 0;$
$u\,|_{t=0} = \left(x^2 + y^2\right) z + z^3,\ \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$

12. $u_t = \Delta u + e^{-x},\ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ t > 0; \quad u\,|_{t=0} = x^2 y^2 + x^4,\ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$

13. $u_t = \Delta u - 2u,\ \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ t > 0; \quad u\,|_{t=0} = e^{x+y} \cos 2z,\ \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$

14. $u_t = \Delta u,\ \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ t > 0; \quad u\,|_{t=0} = \cos (xy) \sin z,\ \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$

15. $u_t = 9\Delta u - u,\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ t > 0;\ u\,|_{t=0} = e^{-z} \sin x \cos y,\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$

16. $u_t = 2\Delta u + t \cos x,\ \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ t > 0;$
$u\,|_{t=0} = \cos y \cos z,\ \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$

17. $u_t = \Delta u + u,\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ t > 0; \quad u\,|_{t=0} = e^{-z} \sin x \cos y,\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$

18. $u_t = 3\Delta u + e^t,\ \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ t > 0;$
$u\,|_{t=0} = \sin (x - y - z)\,,\ \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$

19. $u_t = \Delta u + \cos t,\ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ t > 0; \qquad u\,|_{t=0} = xye^{-x^2-y^2},\ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$

20. $u_t = 4\Delta u - 2u,\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ t > 0; \quad u\,|_{t=0} = e^{x+y} \cos 2z,\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$

21. $u_t = \Delta u + \sin t \sin x \sin y;\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ t > 0; \qquad u\,|_{t=0} = 1,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$

22. $u_t = \Delta u + 2 \sin x \sin y;\ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ t > 0;\ u\,|_{t=0} = x^2 - y^2,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$

23. $u_t = \Delta u\,(x, y, t)\,,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ t > 0;$
$u(x, 0) = \sin \alpha x \sin \beta y,\ \ \alpha, \beta = const,\ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$

24. $u_t = \Delta u\,(x, y, t)\,,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ t > 0;$
$u\,|_{t=0} = \sin \alpha x \cos \beta y,\ \ \alpha, \beta = const,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$

25. $u_t = \Delta u\,(x, y, t)\,,\ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ t > 0;$
$u\,|_{t=0} = \cos \alpha x \cos \beta y,\ \ \alpha,\ \beta = const,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$

7.1.10. 10 - өзіндік жұмыс. Жалғастыру әдісі. Толқындық және жылуөткізгіштік теңдеулер үшін жарты өсте берілген Коши есебі

1. $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x \in (0, \infty)\,, \ \ t > 0; \\ u\,(0, t) = 0, & u(x, 0) = \sin x,\ \ x \in [0, \infty)\,. \end{cases}$

2. $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x \in (0, \infty)\,, \ \ t > 0; \\ u_x\,(0, t) = 0, & u(x, 0) = \cos 2x,\ \ x \in [0, \infty)\,. \end{cases}$

3. $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} - hu, \quad x \in (0, \infty), \quad t > 0; \\ u(0, t) = 0, \quad u(x, 0) = x + x^3, \quad x \in [0, \infty). \end{cases}$

4. $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + (1 + x^2)t, \quad x \in (0, \infty), \quad t > 0; \\ u_x(0, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, \infty). \end{cases}$

5. $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + x^3 t, \quad x \in (0, \infty), \quad t > 0; \\ u(0, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, \infty). \end{cases}$

6. $\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 6xt, \quad x \in (0, \infty), \quad t > 0; \\ u(0, t) = t^3, \quad u(x, 0) = x^3, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x \in [0, \infty). \end{cases}$

7. $\begin{cases} u_{tt} - 9u_{xx} = 2, \quad x \in (0, \infty), \quad t > 0; \\ u - u_x\big|_{x=0} = t^2 - 1, \quad u(x, 0) = x + x^3, \quad u_t(x, 0) = -9x^2, \quad x \in [0, \infty). \end{cases}$

8. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad x \in (0, \infty), \quad t > 0; \\ u(0, t) = t^2, \quad t > 0; \qquad u(x, 0) = x^2, \quad u_t(x, 0) = x, \quad x \in [0, \infty). \end{cases}$

9. $\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} + 16t^2, \quad x \in (0, \infty), \quad t > 0; \\ u(0, t) = 4t^4, \quad t > 0; \qquad u(x, 0) = \frac{1}{6}x^4, \quad u_t(x, 0) = 2\sin x, \quad x \in [0, \infty). \end{cases}$

10. $\begin{cases} 9u_{tt} = u_{xx}, \quad x \in (0, \infty), \quad t > 0; \\ u(0, t) = t^3, \quad t > 0; \qquad u(x, 0) = 27x^3, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x \in [0, \infty). \end{cases}$

11. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 2, \quad x \in (0, \infty), \quad t > 0; \\ u_x(0, t) = 1, \quad t > 0; \qquad u(x, 0) = x + \cos x, \quad u_t(x, 0) = 1, \quad x \in [0, \infty). \end{cases}$

12. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad x \in (0, \infty), \quad t > 0; \\ u_x(0, t) = \cos t, \quad t > 0; \qquad u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = 1, \quad x \in [0, \infty). \end{cases}$

13. $\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx} + e^t, \quad x \in (0, \infty), \quad t > 0; \\ u_x(0, t) = 2 - \cos t, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = 1 + x, \quad u_t(x, 0) = 4 - 3\cos\frac{x}{3}, \quad x \in [0, \infty). \end{cases}$

14. $\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, \quad x \in (0, \infty), \quad t > 0; \\ u(0, t) = 5\sin \omega t, \quad t > 0; \qquad u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x \in [0, \infty). \end{cases}$

15. $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin x, \quad x \in (0, \infty), \quad t > 0; \\ u(0, t) = 0, \quad t > 0; \qquad u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x \in [0, \infty). \end{cases}$

16. $\begin{cases} u_{tt} = 3u_{xx} + 2\left(1 - 6t^2\right)e^{-2x}, \quad x \in (0, \infty), \quad t > 0; \\ (u_x - 2u)\big|_{x=0} = -2 + t - 4t^2, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = 1, \quad u_t(x, 0) = x, \quad x \in [0, \infty). \end{cases}$

17. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad x \in (0, \infty), \quad t > 0; \\ (u_x + u)\big|_{x=0} = 1 - \cos t, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x \in [0, \infty). \end{cases}$

18. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 4, \quad x \in (0, \infty), \quad t > 0; \\ (u_x + u)|_{x=0} = \frac{3}{2}t^2, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = 1 - x, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x \in [0, \infty). \end{cases}$

19. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad x \in (0, \infty), \quad t > 0; \\ (u_t - u)|_{x=0} = 2t - t^2, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = x^2, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x \in [0, \infty). \end{cases}$

20. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 6, \quad x \in (0, \infty), \quad t > 0; \\ (u_t + 2u_x)|_{x=0} = -4t, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = x^2, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x \in [0, \infty). \end{cases}$

21. $\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} + 2, \quad x \in (0, \infty), \quad t > 0; \\ (u_t + 3u_x)|_{x=0} = 3t - e^t, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = 2 - x, \quad u_t(x, 0) = 2, \quad x \in [0, \infty). \end{cases}$

22. $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in (0, \infty), \quad t > 0; \\ u|_{x=0} = g(t), \quad t > 0; \quad u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, \infty). \end{cases}$

23. $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in (0, \infty), \quad t > 0; \\ u_x|_{x=0} = g(t), \quad t > 0; \quad u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, \infty). \end{cases}$

24. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad x \in (0, \infty), \quad t > 0; \\ (u_x - 2u)|_{x=0} = te^{-3t}, \quad t \geq 0; \\ u(x, 0) = 2e^{-x}, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x \geq 0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \in (0, \infty), \quad t > 0; \\ u_x(0, t) = 0, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = x^2 - x^3, \quad u_t(x, 0) = \cos x, \quad x \geq 0. \end{cases}$

7.1.11. 11 - өзіндік жұмыс. Штурм-Лиувилль есебі

1. $\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \\ X'(0) = X(l) = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \\ X(0) = X'(l) = 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \\ X'(0) = X'(l) = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \\ X(0) = 0, \quad X'(l) + hX(l) = 0, \quad h > 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \\ X'(0) - hX(0) = 0, \quad X'(l) = 0, \quad h > 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \\ X'(0) - hX(0) = 0, \quad X'(l) + hX(l) = 0, \quad h > 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < \pi, \\ X(0) = X(\pi) = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < \pi, \\ X'(0) = X'(\pi) = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < \pi, \\ X(0) = X'(\pi) = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < \pi, \\ X'(0) = X(\pi) = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < \pi, \\ X(-\pi) = X(\pi), \quad X'(-\pi) = X'(\pi). \end{cases}$

13. $\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \\ X(0) = 0, \quad \displaystyle\int\limits_0^l X(x)\,dx = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \\ X'(0) = 0, \quad \displaystyle\int\limits_0^l X(x)\,dx = 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \\ X(l) = 0, \quad \displaystyle\int\limits_0^l X(x)\,dx = 0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \\ X'(l) = 0, \quad \displaystyle\int\limits_0^l X(x)\,dx = 0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad -1 < x < 1, \\ X(-1) = X(1), \quad X'(-1) = X'(1). \end{cases}$

18. $\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad -2 < x < 2, \\ X(-2) = X(2), \quad X'(-2) = X'(2). \end{cases}$

19. $\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < 5, \\ X'(0) = X'(5) = 0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} X'' - 2X' + \left(\lambda^2 + 1\right) X = 0, \quad 0 < x < 1, \\ X(0) = X(1) = 0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < l, \\ X'(0) - hX(0) = 0, & X(l) = 0, \ \ h > 0 \end{cases}$

22. $\begin{cases} X'' + 8X' + \left(\lambda^2 + 16\right) X = 0, & 0 < x < \pi, \\ X(0) = X(\pi) = 0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, & 0 < x < 2, \\ X(0) = X(2) = 0, \end{cases}$

24. $\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, & 0 < x < 3, \\ X'(0) = X(3) = 0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, & 0 < x < 1, \\ X(0) = X'(1) = 0. \end{cases}$

7.1.12. 12 - өзіндік жұмыс. Біртекті толқындық теңдеуі үшін бастапқы-шеттік есеп

1. $\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \, t > 0, \\ u(0,t) = 0, \, u(1,t) = 0, \, t > 0, \\ u(x,0) = 0, \, u_t(x,0) = \begin{cases} x, \, 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ 1 - x, \, \dfrac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}, \, 0 \le x \le 1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \, t > 0, \\ u(0,t) = 0, \, u(1,t) = 0, \, t > 0, \\ u(x,0) = x(1-x), \, u_t(x,0) = 0 \, , \, 0 \le x \le 1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} u_{tt} = 7u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \, t > 0, \\ u(0,t) = 0, \, u(1,t) = 0, \, t > 0, \\ u(x,0) = x^2(1-x), \, u_t(x,0) = 0 \, , \, 0 \le x \le 1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \, t > 0, \\ u(0,t) = 0, \, u(1,t) = 0, \, t > 0, \\ u(x,0) = 0, \, u_t(x,0) = x(1-x) \, , \, 0 \le x \le 1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} u_{tt} = 7u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \, t > 0, \\ u(0,t) = 0, \ u(1,t) = 0, \, t > 0, \\ u(x,0) = 0, \, u_t(x,0) = x^2(1-x) \, , \, 0 \le x \le 1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \ u(1,t) = 0, \, t > 0, \\ u(x,0) = x(x^3 - 2x^2 + 1), \, u_t(x,0) = 0 \ \ , \, 0 \le x \le 1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} u_{tt} = 64u_{xx}, \quad 0 < x < 3, \ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \ u(3,t) = 0, \, t > 0, \\ u(x,0) = 0, \, u_t(x,0) = x(x^2 - 9) \ \ , \, 0 \le x \le 3. \end{cases}$

8. $\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx}, & 0 < x < 2, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \ \ u(2,t) = 0, \ \ t > 0, \\ u(x,0) = 4 - x^2, \quad u_t(x,0) = 0, \ \ 0 \le x \le 2. \end{cases}$

9. $\begin{cases} u_{tt} = 5u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \ t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \ u_x(2,t) = 0, \ t > 0, \\ u(x,0) = 2x^2(3-x), \ u_t(x,0) = 0, \ \ 0 \le x \le 2. \end{cases}$

10. $\begin{cases} u_{tt} = 5u_{xx}, \quad 0 < x < 2, \ t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \ u_x(2,t) = 0, \ t > 0, \\ u(x,0) = 0, \ u_t(x,0) = 2x^2(3-x), \ \ 0 \le x \le 2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \ t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \ u_x(\pi,t) = 0, \ t > 0, \\ u(x,0) = x^3(3x - 4\pi), \ \ u_t(x,0) = 0, \ \ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

12. $\begin{cases} u_{tt} = 7u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \ t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \ u_x(1,t) = 0, \ t > 0, \\ u(x,0) = 3x^2(x^2 - 2), \ u_t(x,0) = 0, \ \ 0 \le x \le 1. \end{cases}$

13. $\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \ t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \ u_x(\pi,t) = 0, \ t > 0, \\ u(x,0) = 0, \ \ u_t(x,0) = x^3(3x - 4\pi), \ \ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

14. $\begin{cases} u_{tt} = 7u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \ t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \ u_x(1,t) = 0, \ t > 0, \\ u(x,0) = 0, \ u_t(x,0) = 3x^2(x^2 - 2), \ \ 0 \le x \le 1. \end{cases}$

15. $\begin{cases} u_{tt} = 16u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \ \ t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \ u_x(\pi,t) = 0, \ t > 0, \\ u(x,0) = x^2(x - \pi), \ \ u_t(x,0) = 0, \ \ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

16. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \ t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \ u_x(1,t) = 0, \ t > 0, \\ u(x,0) = x^2(3x^2 - 8x + 6), \ u_t(x,0) = 0, \ \ 0 \le x \le 1. \end{cases}$

17. $\begin{cases} u_{tt} = 16u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \ \ t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \ u_x(\pi,t) = 0, \ t > 0, \\ u(x,0) = 0, \ \ u_t(x,0) = x^2(x - \pi), \ \ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

18. $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \ \ t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \ u_x(\pi,t) = 0, \ \ t > 0, \\ u(x,0) = x, \ \ u_t(x,0) = 1, \ \ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

19. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < 4, \ \ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \ \ u_x(4,t) = 0, \ \ t > 0, \\ u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x, & x \in [0,\, 2]\,, \\ 2 - \dfrac{1}{2}x, & x \in [2,\, 4]\,, \end{cases} \qquad u_t(x,0) = 0, \ \ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

20. $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = \sin 7x,\ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

21. $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = \sin \dfrac{2\pi x}{l},\ 0 \le x \le l. \end{cases}$

22. $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = x,\ u_t(x,0) = 1,\ 0 \le x \le l. \end{cases}$

23. $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = \sin \dfrac{5\pi x}{2l},\ u_t(x,0) = \sin \dfrac{\pi x}{2l},\ 0 \le x \le l. \end{cases}$

24. $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = \sin \dfrac{\pi x}{2l} + \sin \dfrac{3\pi x}{2l},\ 0 \le x \le l. \end{cases}$

25. $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = \cos \dfrac{\pi x}{2l}, \quad u_t(x,0) = \cos \dfrac{3\pi x}{2l} + \cos \dfrac{5\pi x}{2l},\ 0 \le x \le l. \end{cases}$

7.1.13. 13 - өзіндік жұмыс. Біртекті емес толқындық теңдеуі үшін бастапқы-шеттік есеп

1. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 2b, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \ \ b = const, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0,\ \ t > 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0; \end{cases}$

2. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \cos t, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ \ t > 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + Axe^{-t}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0,\ \ t > 0, \\ u(x,0) = 2\sin \frac{\pi x}{l},\ \ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} u_{tt} = a^2 \cdot u_{xx} + A \cdot e^{-t} \cdot \cos \frac{x}{2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ \ t > 0, \\ u(x,0) = 0,\ \ u_t(x,0) = 4 \cdot \sin \frac{3x}{2} \cdot \sin x. \end{cases}$

5. $\begin{cases} u_{tt} = 25 \cdot u_{xx} + 7 \cdot \sin t \cdot \sin \frac{3\pi x}{10},\ 0 < x < 10,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(10,t) = 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = x^2 - 10x,\ u_t(x,0) = 0,\ 0 \le x \le 10. \end{cases}$

6. $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 2t, \ \ 0 < x < 1, \ \ t > 0, \\ u\left|_{t=0} = 0, \ \ u_t \right|_{t=0} = x, \\ u\left|_{x=0} = 0, \ \ u_x \right|_{x=1} = t. \end{cases}$

7. $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + b \cdot shx, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \ b = const, \\ u\,(t,0) \ = \ u\,(t,l) = u\,(0,x) = u_t\,(0,x) = 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + x\,(x-l)\,t^2, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u\,(0,t) \ = \ u\,(l,t) = 0, \quad t > 0, \\ u\,(x,0) = u_t\,(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l. \end{cases}$

9. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u\,(t,0) \ = t^2, \ \ u\,(t,\pi) = t^3, \quad t > 0, \\ u\,(0,x) = \sin x, \quad u_t\,(0,x) = 0, \quad 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

10. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u\,(t,0) \ = t, \ \ u_x\,(t,\pi) = 1, \quad t > 0, \\ u\,(0,x) = \sin \frac{x}{2}, \quad u_t\,(0,x) = 1, \ \ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

11. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u\left|_{x=0} \ = 0, \ \ u\right|_{x=l} = t, \quad t > 0, \\ u\left|_{t=0} \ = \ u_t\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \le x \le l. \end{cases}$

12. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u\left|_{x=0} \ = t+1, \ \ u\right|_{x=1} = t^3 + 2, \quad t > 0, \\ u\left|_{t=0} = x+1, \ \ u_t\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \le x \le 1. \end{cases}$

13. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 4u + 4\sin^2 x, \ \ 0 < x < \frac{\pi}{2}, \ \ t > 0, \\ u_x\,(0,t) = u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0, \ \ t > 0, \\ u\,(x,0) = u_t\,(x,0) = 0, \ \ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

14. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + x - \pi, \ \ 0 < x < \pi, \ \ t > 0, \\ u_x\left|_{x=0} = 0, \quad u\right|_{x=\pi} = 0, \quad t > 0 \\ u\left|_{t=0} = \cos \frac{x}{2}, \quad u_t\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

15. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 3u + 4\sin x \sin 2t, \ \ 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0, \\ u\left|_{x=0} = 0, \quad u_x\right|_{x=\pi/2} = 0, \quad t > 0, \\ u\left|_{t=0} = 0, \quad u_t\right|_{t=0} = \sin 3x, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

16. $\begin{cases} u_{tt} + 2u_t = u_{xx} + 4x + 8e^t \cos x, \ \ 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0, \\ u_x\left|_{x=0} = 2t, \quad u\right|_{x=\pi/2} = \pi t, \ \ t > 0, \\ u\left|_{t=0} = \cos x, \quad u_t\right|_{t=0} = 2x, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

17. $\begin{cases} u_{tt} + u_t = u_{xx}, \ \ 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u\left|_{x=0} = t, \quad u\right|_{x=1} = 0, \quad t > 0, \\ u\left|_{t=0} = 0, \quad u_t\right|_{t=0} = 1 - x, \quad x \in [0,1]\,. \end{cases}$

18. $\begin{cases} u_{tt} - 2u_t = u_{xx} + 4t\left(\sin x - x\right), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0, \\ u\left|_{x=0} = 3, \quad u_x\right|_{x=\pi/2} = t^2 + t, \quad t > 0, \\ u\left|_{t=0} = 3, \quad u_{t|_{t=0}} = x + \sin x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \right. \end{cases}$

19. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u, \;\; 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u\left|_{x=0} = 0, \quad u\right|_{x=\pi} = t, \quad t > 0, \\ u\left|_{t=0} = 0, \quad u_{t|_{t=0}} = \frac{x}{\pi}, \quad x \in [0, \pi]. \right. \end{cases}$

20. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad x \in (0, \pi), \quad t \in (0, +\infty), \\ u(x, 0) = 0, \;\; u_t(x, 0) = \sin x, \;\; x \in [0, \pi], \\ u(0, t) = t^2, \quad u(\pi, t) = t^3, \quad t \in [0, +\infty). \end{cases}$

21. $\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} + e^{-t}\sin x, \quad x \in (0, \pi), \quad t \in (0, +\infty), \\ u(x, 0) = 0, \;\; u_t(x, 0) = 0, \;\; x \in [0, \pi], \\ u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad t \in [0, +\infty). \end{cases}$

22. $\begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx} + xe^{-t}, \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, +\infty), \\ u(x, 0) = 0, \;\; u_t(x, 0) = 0, \;\; x \in [0, 1], \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t \in [0, +\infty). \end{cases}$

23. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad x \in (0, \pi), \quad t \in (0, +\infty), \\ u(x, 0) = \sin^2 \frac{5}{4}x, \;\; u_t(x, 0) = 0, \;\; x \in (0, \pi), \\ u_x(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = \frac{1}{2}, \quad t \in [0, +\infty). \end{cases}$

24. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad x \in (0, 3), \quad t \in (0, +\infty), \\ u(x, 0) = 0, \;\; u_t(x, 0) = 0, \;\; x \in (0, 3), \\ u(0, t) = 0, \quad u(3, t) = t, \quad t \in [0, +\infty). \end{cases}$

25. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, +\infty), \\ u(x, 0) = x + 1, \;\; u_t(x, 0) = 0, \;\; x \in (0, 1), \\ u(0, t) = t + 1, \quad u(1, t) = t^3 + 2, \quad t \in [0, +\infty). \end{cases}$

7.1.14. 14 - өзіндік жұмыс. Біртекті жылуөткізгіштік теңдеу үшін бастапқы-шеттік есеп

1. $\begin{cases} u_t = a^2u_{xx}, \;\; 0 < x < l, \;\; t > 0, \\ u_x(0, t) = u(l, t) = 0, \;\; t > 0, \\ u(x, 0) = A(l - x), \;\; 0 \le x \le l, \;\; A = const > 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} u_t = a^2u_{xx}, \;\; 0 < x < l, \;\; t > 0, \\ u_x(0, t) = u(l, t) = 0, \;\; t > 0, \\ u(x, 0) = Bx, \;\; 0 \le x \le l, \;\; B = const > 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} u_t = 4u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \;\; t > 0, \\ u(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \sin \frac{7x}{2}, \;\; 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

4. $\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = x(1-x), & 0 \le x \le 1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} u_t = 9u_{xx}, & 0 < x < 4, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(4,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 1, & 0 \le x \le 4. \end{cases}$

6. $\begin{cases} u_t = 3u_{xx}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = x\sin x, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

7. $\begin{cases} u_t = 9u_{xx}, & 0 < x < 2, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(2,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = x^2(2-x), & 0 \le x \le 2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} u_t = 4u_{xx}, & 0 < x < 3, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(3,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = x\left(9-x^2\right), & 0 \le x \le 3. \end{cases}$

9. $\begin{cases} u_t = 4u_{xx}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(2,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1, \\ 2-x, & 1 \le x \le 2. \end{cases} \end{cases}$

10. $\begin{cases} u_t = 7u_{xx}, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = x\left(3x^4 - 10x^2 + 7\right), & 0 \le x \le 1. \end{cases}$

11. $\begin{cases} u_t = 5u_{xx}, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = x\left(x^3 - 2x^2 + 1\right), & 0 \le x \le 1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} u_t = 2u_{xx}, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = x\left(3x^4 - 5x^3 + 2\right), & 0 \le x \le 1. \end{cases}$

13. $\begin{cases} u_t = 9u_{xx}, & 0 < x < 4, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \quad u_x(4,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = x^2, & 0 \le x \le 4. \end{cases}$

14. $\begin{cases} u_t = 4u_{xx}, & 0 < x < 2, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \quad u_x(2,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = x(x-4), & 0 \le x \le 2. \end{cases}$

15. $\begin{cases} u_t = 9u_{xx}, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u_x(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = x(1-x), & 0 \le x \le 1. \end{cases}$

16. $\begin{cases} u_t = 3u_{xx}, \ \ 0 < x < 2, \ \ \ t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \ \ \ u_x(2,t) = 0, \ \ t > 0, \\ u(x,0) = 2x^2(3-x), \ \ 0 \le x \le 2. \end{cases}$

17. $\begin{cases} u_t = 5u_{xx}, \ \ 0 < x < \sqrt{2}, \ \ \ t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \ \ \ u_x\left(\sqrt{2},t\right) = 0, \ \ t > 0, \\ u(x,0) = 3x^2\left(x^2-4\right), \ \ 0 \le x \le \sqrt{2}. \end{cases}$

18. $\begin{cases} u_t = 3u_{xx}, \ \ 0 < x < 1, \ \ \ t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \ \ \ u_x(1,t) = 0, \ \ t > 0, \\ u(x,0) = x^3(3x-4), \ \ 0 \le x \le 1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} u_t = u_{xx}, \ \ 0 < x < 1, \ \ \ t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \ \ \ u_x(1,t) = 0, \ \ t > 0, \\ u(x,0) = x^2\left(3x^2-8x+6\right), \ \ 0 \le x \le 1. \end{cases}$

20. $\begin{cases} u_t = u_{xx}, \ \ 0 < x < \pi, \ \ \ t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \ \ \ u_x(\pi,t) = 0, \ \ t > 0, \\ u(x,0) = x^2(x-\pi)^2, \ \ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

21. $\begin{cases} u_t = u_{xx}, \ \ 0 < x < \pi, \ \ \ t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \ \ \ u_x(\pi,t) = 0, \ \ t > 0, \\ u(x,0) = x^2(x-\pi)^2, \ \ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

22. $\begin{cases} u_t = 3u_{xx}, \ \ 0 < x < \pi, \ \ \ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \ \ \ u_x(\pi,t) = 0, \ \ t > 0, \\ u(x,0) = x(\pi-x), \ \ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

23. $\begin{cases} u_t = 5u_{xx}, \ \ 0 < x < 2, \ \ \ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \ \ \ u_x(2,t) = 0, \ \ t > 0, \\ u(x,0) = x(4-x), \ \ 0 \le x \le 2. \end{cases}$

24. $\begin{cases} u_t = u_{xx}, \ \ 0 < x < 1, \ \ \ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \ \ \ u_x(1,t) = 0, \ \ t > 0, \\ u(x,0) = x^2(3-2x), \ \ 0 \le x \le 1. \end{cases}$

25. $\begin{cases} u_t = u_{xx}, \ \ 0 < x < 1, \ \ \ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \ \ \ u_x(1,t) = 0, \ \ t > 0, \\ u(x,0) = (x-1)^3 + 1, \ \ 0 \le x \le 1. \end{cases}$

7.1.15. 15 - өзіндік жұмыс. Біртекті емес жылуөткізгіштік теңдеуі үшін бастапқы-шеттік есеп

1. $\begin{cases} u_t = 9u_{xx} - 54x, \ \ \ 0 < x < 4, \ \ \ t > 0, \\ u(0,t) = 1, \ \ \ u(4,t) = 61, \ \ t > 0, \\ u(x,0) = 2 - x + x^3, \ \ 0 \le x \le 4. \end{cases}$

2. $\begin{cases} u_t = u_{xx} - 2, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 1, \quad u(1,t) = 3, \ \ t > 0, \\ u(x,0) = 2x^2 + 1, \ \ 0 \le x \le 1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} u_t = 3u_{xx} - 18x, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) = -1, \quad u(1,t) = -1, \ \ t > 0, \\ u(x,0) = x^3 - 2x, \ \ 0 \le x \le 1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} u_t = u_{xx} + \pi^2 \sin \pi x, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = -\pi, \ \ t > 0, \\ u(x,0) = 2 \sin \pi x, \ \ 0 \le x \le 1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} u_t = 9u_{xx} - 18, \quad 0 < x < 4, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) = -1, \quad u(4,t) = 10, \ \ t > 0, \\ u(x,0) = 2x^2 - x - 2, \ \ 0 \le x \le 4. \end{cases}$

6. $\begin{cases} u_t = u_{xx} - 6x, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 3, \quad u_x(1,t) = 2, \ \ t > 0, \\ u(x,0) = x^3 - x^2 + x + 3, \ \ 0 \le x \le 1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} u_t = u_{xx} - 2, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) = -1, \quad u(1,t) = 1, \ \ t > 0, \\ u(x,0) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1, \ \ 0 \le x \le 1. \end{cases}$

8. $\begin{cases} u_t = 4u_{xx} + x\left(3e^t + 1\right), \ \ 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = t + 2, \ \ t > 0, \\ u(x,0) = 2x + 3 \sin \frac{3x}{2}, \ \ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

9. $\begin{cases} u_t = 16u_{xx} + 2, \quad 0 < x < 7, \quad t > 0, \\ \cancel{u}_x(0,t) = u(7,t) = 0, \ \ t > 0, \\ u(x,0) = 0, \ 0 \le x \le 7. \end{cases}$

10. $\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} - \beta u, \ \ \beta = const, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(t,0) = 0, \ \ u_x(t,l) = 0, \ \ t > 0, \\ u(0,x) = \sin \frac{\pi x}{2l}, \ \ 0 \le x \le l. \end{cases}$

11. $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u_x(t,0) = u_x(t,l) = q, \quad t > 0, \\ u(0,x) = Ax, \quad 0 \le x \le l, \ \ A, q = const. \end{cases}$

12. $\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} - \beta u, + \sin \frac{\pi x}{l}, \ \ 0 < x < l, \ \ t > 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \ \ t > 0, \\ u(0,x) = 0, \ \ 0 \le x \le l, \ \ \beta = const. \end{cases}$

13. $\begin{cases} u_t = u_{xx} + u + 2 \sin 2x \sin x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ u_x(0,t) = 0, \ \ u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 0, \ \ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

14. $\begin{cases} u_t = u_{xx} - 2u_x + x + 2t, \quad 0 < x < 1, \\ u\,(0,t) \;= 0, \qquad u\,(1,t) = t, \quad t > 0, \\ u\,(x,0) = e^x \sin \pi x, \;\; 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$

15. $\begin{cases} u_t = u_{xx} + u - x + 2\sin 2x \cos x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ u\,(0,t) = 0, \;\; u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 1, \quad t > 0, \\ u\,(x,0) = x, \;\; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

16. $\begin{cases} u_t = u_{xx} + 4u + x^2 - 2t - 4x^2 t + 2\cos^2 x, \quad 0 < x < \pi, \\ u_x\,(0,t) \;= 0, \qquad u_x\,(\pi,t) = 2\pi t, \;\; t > 0, \\ u\,(x,0) = 0, \;\; 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

17. $\begin{cases} u_t - u_{xx} + 2u_x - u = e^x \sin x - t, \quad 0 < x < \pi, \\ u_x\,(0,t) \;= 1 + t, \qquad u\,(\pi,t) = 1 + t, \;\; t > 0, \\ u\,(x,0) = 1 + e^x \sin 2x, \;\; 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

18. $\begin{cases} u_t - u_{xx} - u = xt\,(2 - t) + 2\cos t, \quad 0 < x < \pi, \\ u_x\,(0,t) \;= t^2, \qquad u\,(\pi,t) = t^2, \;\; t > 0, \\ u\,(x,0) = \cos 2x, \;\; 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

19. $\begin{cases} u_t - u_{xx} - 9u = 4\sin^2 t \cos 3x - 9x^2 - 2, \quad 0 < x < \pi, \\ u_x\,(0,t) \;= 0, \qquad u_x\,(\pi,t) = 2\pi, \;\; t > 0, \\ u\,(x,0) = x^2 + 2, \;\; 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

20. $\begin{cases} u_t = u_{xx} + 6u + 2t\,(1 - 3t) - 6x + 2\cos x \cos 2x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ u_x\,(0,t) \;= 1, \qquad u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = t^2 + \frac{\pi}{2}, \;\; t > 0, \\ u\,(x,0) = x, \;\; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

21. $\begin{cases} u_t = u_{xx} - u + e^{-t} \cos x, \;\; 0 < t < \infty, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ u\,(0,t) = 0, \;\; u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0, \;\; t > 0, \\ u\,(x,0) = \sin x, \;\; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

22. $\begin{cases} u_t = u_{xx} + 4u + 2\cos^2 x, \\ u_x\,(0,t) = 0, \;\; u_x\,(\pi,t) = 0, \;\; t > 0, \\ u\,(x,0) = 0, \;\; 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

23. $\begin{cases} u_t = u_{xx} - u + \left(x - \frac{\pi}{2}\right) e^{-t}, \\ u_x\,(0,t) = 0, \;\; u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0, \;\; t > 0, \\ u\,\big|_{t=0} = 0, \;\; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

24. $\begin{cases} u_t = u_{xx} + u + \cos t, \\ u_x\,(0,t) = 0, \;\; u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0, \;\; t > 0, \\ u\,(x,0) = \cos 2x, \;\; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

25. $\begin{cases} u_t = u_{xx} + u + \sin x, \\ u_x\,(0,t) = 0, \;\; u_x\,(\pi,t) = 0, \;\; t > 0, \\ u\,\big|_{t=0} = \cos x, \;\; 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

7.1.16. 16 - өзіндік жұмыс. Эллипстік типті теңдеулер. Гармоникалық функциялар

1. $u(x,y) = xy^3 - x^3y$ функциясына түйіндес гармоникалық $v(x,y)$ функциясын табыңыз.

2. $\mathbb{R}^2$ жазықтығындағы $a < r < b$ сақинада гарманикалық $(\Delta u = 0)$ және сақина шекарада

$$u_r\,(a) - hu\,(a) = A,\;\; u_r\,(b) = B,\;\; a, b, A, B = const$$

шарттарды қанағаттандыратын $u = u\,(r)$ функцияны анықтаңыз.

3. Коши-Риман шартын қолданып, гармоникалық $u(x,y)$ функциясын табыңыз, егер $u_x(x,y) = 3x^2y - y^3$ болса.

4. Коши-Риман шартын қолданып, $u(x,y)$ функциясын табыңыз, егер $u_y(x,y) = e^x \cos y$ болса.

5. Гармоникалық $u(x,y,z)$ функциясын табыңыз, егер $u_y(x,y,z) = e^x \cos z - 2y$ болса.

6. Айталық, $u\,(r)$ функциясы $K := \left\{ a < r < b,\; 0 \le \varphi \le 2\pi,\; 0 < a < b < \infty,\; r = \sqrt{x^2+y^2} \right\}$ сақинада гармоникалық және $\overline{K}$ тұйық облыста үзіліссіз болсын. Егер

$$u\,(c) = P,\;\; u_r\,(b) = T,\;\; a,\; b,\; c,\; P,\; T = const$$

белгілі болса, $u(a)$ мәні неге тең?

7. Айталық, $u\,(r)$ функциясы $K := \left\{ a < r < b,\; 0 \le \varphi \le 2\pi,\; 0 < a < b < \infty,\; r = \sqrt{x^2+y^2} \right\}$ сақинада гармоникалық және $\overline{K}$ тұйық облыста үзіліссіз болсын. Егер

$$u_r\,(c) = P,\;\; u\,(b) = T,\;\; a,\; b,\; c,\; P,\; T = const$$

белгілі болса, $u(a)$ мәні неге тең?

8. Берілген $Ref\,(z) = u\,(x,y) = \sin xchy$ нақты бөлігі бойынша $f(z)$ аналитикалық функциясын құрыңыз.

9. $u(x,y) = e^y \sin x$ функциясына гармоникалық түйіндес $v(x,y)$ функциясын табыңыз.

10. Айталық, $u\,(r)$ функциясы $K := \left\{ a < r < b,\; 0 \le \varphi \le 2\pi,\; 0 < a < b < \infty,\; r = \sqrt{x^2+y^2} \right\}$ сақинада гармоникалық және $\overline{K}$ тұйық облыста үзіліссіз болсын. Егер

$$u\,(c) = P,\;\; u\,(d) = T,\;\; a,\; b,\; c,\; d,\; P,\; T = const,\;\; a < c < b,\;\; a < d < b$$

белгілі болса, $u(a),\; u(b)$ мәндері неге тең?

11. Айталық, $u(r)$ функциясы $D := \left\{ a < r < b,\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ 0 < a < b < \infty \right\}$ шар қабатында гармоникалық және $\overline{D}$ тұйық облыста үзіліссіз болсын. Егер

$$u(c) = P,\ \ u(b) = T,\ \ a,\ b,\ c,\ P,\ T = const$$

белгілі болса, $u(a)$ мәні неге тең?

12. Коши-Риман шартын қолданып, $u(x, y)$ функциясына түйіндес гармоникалық $v(x, y)$ функциясын табыңыз, егер $u_x(x, y) = x^3 - 3xy^2$ болса.

13. $\mathbb{R}^2$ жазықтығындағы $a < r < b$ сақинада гарманикалық $(\Delta u = 0)$ және сақина шекарада

$$u(a) = A,\ \ u(b) = B,\ \ a, b, A, B = const$$

шарттарды қанағаттандыратын $u = u(r)$ функцияны (радиалдық шешімін) анықтаңыз.

14. Коши-Риман шартын қолданып, $u(x, y)$ функциясына түйіндес гармоникалық $v(x, y)$ функциясын табыңыз, егер $u_y(x, y) = shx \sin y$ болса.

15. $\mathbb{R}^2$ жазықтығындағы $a < r < b$ сақинада гарманикалық $(\Delta u = 0)$ және сақина шекарада

$$u_r(a) = A,\ \ u(b) = B,\ \ a, b, A, B = const$$

шарттарды қанағаттандыратын $u = u(r)$ функцияны (радиалдық шешімін) анықтаңыз.

16. Коши-Риман шартын қолданып, $u(x, y)$ функциясына түйіндес гармоникалық $v(x, y)$ функциясын табыңыз, егер $u_x(x, y) = x + y$ болса.

17. $\mathbb{R}^2$ жазықтығындағы $a < r < b$ сақинада гарманикалық $(\Delta u = 0)$ және сақина шекарада

$$u_r(a) - hu(a) = A,\ \ u(b) = B,\ \ a, b, A, B = const$$

шарттарды қанағаттандыратын $u = u(r)$ функцияны (радиалдық шешімін) анықтаңыз.

18. Коши-Риман шартын қолданып, $u(x, y)$ функциясына түйіндес гармоникалық $v(x, y)$ функциясын табыңыз, егер $u_x(x, y) = xy + 1$ болса.

19. Айталық, $u(r)$ функциясы $K := \left\{ a < r < b,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 < a < b < \infty,\ r = \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$ сақинада гармоникалық және $\overline{K}$ тұйық облыста үзіліссіз болсын. Егер

$$u(c) = P,\ \ u_r(b) + hu(b) = T,\ \ a,\ b,\ c,\ P,\ T = const$$

белгілі болса, $u(a)$ мәні неге тең?

20. Айталық, $u\,(r)$ функциясы
$K := \left\{ a < r < b,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 < a < b < \infty,\ r = \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$ сақинада гармоникалық және $\overline{K}$ тұйық облыста үзіліссіз болсын. Егер

$$u\,(c) = P,\ \ u\,(a) = T,\ \ a,\ b,\ c,\ P,\ T = const$$

белгілі болса, $u(b)$ мәні неге тең?

21. Берілген $Ref\,(z) = u\,(x, y) = 2\sin xchy - x$ нақты бөлігі бойынша $f(z)$ аналитикалық функциясын құрыңыз.

22. Айталық, $u\,(r)$ функциясы
$D := \left\{ a < r < b,\ \ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ 0 < a < b < \infty \right\}$ шар қабатында гармоникалық және $\overline{D}$ тұйық облыста үзіліссіз болсын. Егер

$$u\,(c) = P,\ \ u_r\,(b) + hu\,(b) = T,\ \ a,\ b,\ c,\ P,\ T = const$$

белгілі болса, $u(a)$ мәні неге тең?

23. Айталық, $u\,(r)$ функциясы
$D := \left\{ a < r < b,\ \ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ 0 < a < b < \infty \right\}$ шар қабатында гармоникалық және $\overline{D}$ тұйық облыста үзіліссіз болсын. Егер

$$u\,(c) = P,\ \ u_r\,(d) = T,\ \ a,\ b,\ c,\ d,\ P,\ T = const,\ \ a < c < b,\ \ a < d < b$$

белгілі болса, $u(a),\ u(b)$ мәндері неге тең?

24. Айталық, $u\,(r)$ функциясы
$D := \left\{ a < r < b,\ \ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ 0 < a < b < \infty \right\}$ шар қабатында гармоникалық және $\overline{D}$ тұйық облыста үзіліссіз болсын. Егер

$$u\,(c) = P,\ \ u_r\,(b) = T,\ \ a,\ b,\ c,\ P,\ T = const$$

белгілі болса, $u(a)$ мәні неге тең?

25. Айталық, $u\,(r)$ функциясы
$D := \left\{ a < r < b,\ \ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ 0 < a < b < \infty \right\}$ шар қабатында гармоникалық және $\overline{D}$ тұйық облыста үзіліссіз болсын. Егер

$$u_r\,(c) = P,\ \ u\,(b) = T,\ \ a,\ b,\ c,\ P,\ T = const$$

белгілі болса, $u(a)$ мәні неге тең?

7.1.17. 17 - өзіндік жұмыс. Лаплас және Пуассон теңдеулері үшін Фурье әдісі

1. $$\begin{cases} \Delta u\left(x,y\right)=0, \quad 0<x<a,\ \ 0<y<b, \\ u\left(0,y\right)=A, \quad u\left(a,y\right)=Ay,\ 0\le y\le b, \\ u_y\left(x,0\right)=u_y\left(x,b\right)=0,\ \ 0\le x\le a,\ A=const>0. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} \Delta u\left(x,y\right)=0, \quad 0<x<a,\ \ 0<y<b, \\ u\left(0,y\right)=A\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right), \quad u\left(a,y\right)=0, \\ u\left(x,0\right)=B\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right), \quad u\left(x,b\right)=0, \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} \Delta u\left(x,y\right)=2, \quad 0<x<a,\ \ 0<y<b, \\ u\left(0,y\right)=u\left(a,y\right)=0,\ 0\le y\le b, \\ u\left(x,0\right)=u\left(x,b\right)=0,\ \ 0\le x\le a. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=x^2\cdot y,\ 0\le x\le a,\ 0\le y\le b, \\ u\left(0,y\right)=u\left(a,y\right)=u\left(x,0\right)=u_y\left(x,b\right)=0 \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, \quad 0<x<a, \quad 0<y<b, \\ u\left(x,0\right)=x\left(x^2-3ax+2a^2\right), \ \ u\left(x,b\right)=0, \quad 0\le x\le a, \\ u\left(0,y\right)=0, \quad u\left(a,y\right)=0, \quad 0\le y\le b. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} \Delta u\left(x,y\right)=0, \quad 0<x<a,\ \ 0<y<b, \\ u\left(0,y\right)=\frac{\partial u}{\partial x}\left(a,y\right)=0, \quad 0\le y\le b, \\ u\left(x,0\right)=0,\ u\left(x,b\right)=\sin\frac{5\pi}{2a},\ \ 0\le x\le a. \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} \Delta u\left(x,y\right)=0, \quad 0<x<a,\ \ 0<y<b, \\ u\left(0,y\right)=1 \ \ u\left(a,y\right)=\cos\frac{3\pi y}{2b}, \quad 0\le y\le b, \\ \frac{\partial u}{\partial y}\left(x,0\right)=u\left(x,b\right)=0,\ \ 0\le x\le a. \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} \Delta u\left(x,y\right)=0, \quad 0<x<a,\ \ 0<y<b, \\ u_x\left(0,y\right)=0, \quad u_x\left(a,y\right)=0, \quad 0\le y\le b, \\ u_y\left(x,0\right)=0,\ u_y\left(x,b\right)=1,\ \ 0\le x\le a. \end{cases}$$

9. $$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, \quad 0<x<1,\ 0<y<1, \\ u\left(x,0\right)=x\left(1-x\right), \ \ u\left(x,1\right)=0,\ 0\le x\le 1, \\ u\left(0,y\right)=0, \quad u\left(1,y\right)=0,\ \ 0\le y\le 1 \end{cases}$$

10. $$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, \quad 0<x<2,\ 0<y<3, \\ u\left(x,0\right)=x^2\left(2-x\right), \ \ u\left(x,3\right)=0,\ 0\le x\le 2, \\ u\left(0,y\right)=0, \quad u\left(2,y\right)=0,\ \ 0\le y\le 3 \end{cases}$$

11. $$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, \quad 0<x<2,\ 0<y<2, \\ u\left(x,0\right)=\begin{cases} x,\ 0\le x\le 1, \\ 2-x, \quad 1\le x\le 2, \end{cases} \quad u\left(x,2\right)=0, \quad 0\le x\le 2 \\ u\left(0,y\right)=0, \quad u\left(2,y\right)=0,\ \ 0\le y\le 2 \end{cases}$$

12. $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, \quad 0<x<\pi,\ 0<y<1, \\ u(x,0)\ =x\sin x,\ \ u(x,1)\ =0,\ 0\le x\le\pi, \\ u(0,y)=0, \quad u(\pi,y)=0,\ \ 0\le y\le 1 \end{cases}$

13. $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, \quad 0<x<3,\ 0<y<2, \\ u(x,0)\ =0,\ \ u_y(x,2)\ =x^2,\ 0\le x\le 3, \\ u_x(0,y)=0, \quad u_x(3,y)=0,\ \ 0\le y\le 2 \end{cases}$

14. $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, \quad 0<x<1,\ 0<y<2, \\ u(x,0)\ =0,\ \ u_y(x,2)\ =1-x,\ 0\le x\le 1, \\ u_x(0,y)=0, \quad u_x(1,y)=0,\ \ 0\le y\le 2 \end{cases}$

15. $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, \quad 0<x<2,\ 0<y<2, \\ u(x,0)\ =0,\ \ u_y(x,2)\ =x^2-4,\ 0\le x\le 2, \\ u_x(0,y)=0, \quad u_x(2,y)=0,\ \ 0\le y\le 2 \end{cases}$

16. $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, \quad 0<x<1,\ 0<y<1, \\ u(x,0)\ =0,\ \ u_y(x,1)\ =(x-1)^2,\ 0\le x\le 1, \\ u_x(0,y)=0, \quad u_x(1,y)=0,\ \ 0\le y\le 1. \end{cases}$

17. $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, \quad 0<x<3,\ 0<y<1, \\ u(x,0)\ =0,\ \ u_y(x,1)\ =0,\ 0\le x\le 3, \\ u(0,y)=y\left(2y^2-9y+12\right), \quad u_x(3,y)=0,\ \ 0\le y\le 1. \end{cases}$

18. $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, \quad 0<x<1,\ 0<y<\pi, \\ u_y(x,0)\ =0,\ \ u(x,\pi)\ =0,\ 0\le x\le 1, \\ u_x(0,y)=0, \quad u_x(1,y)=\sin y,\ \ 0\le y\le \pi. \end{cases}$

19. $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, \quad 0<x<2,\ 0<y<3, \\ u_y(x,0)\ =0,\ \ u(x,3)\ =0,\ 0\le x\le 2, \\ u_x(0,y)=0, \quad u_x(2,y)=y(3-y),\ \ 0\le y\le 3. \end{cases}$

20. $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, \quad 0<x<1,\ 0<y<\pi, \\ u_y(x,0)\ =0,\ \ u(x,\pi)\ =0,\ 0\le x\le 1, \\ u_x(0,y)=0, \quad u_x(1,y)=\pi^2-y^2,\ \ 0\le y\le \pi. \end{cases}$

21. $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, \quad 0<x<3,\ 0<y<2, \\ u(x,0)=0,\ \ u(x,2)=x(3-x),\ 0<x<3, \\ u(0,y)=0, \quad u(3,y)=0,\ \ 0<y<2. \end{cases}$

22. $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, \quad 0<x<2,\ 0<y<1, \\ u(x,0)=x^2(x-2)^2,\ \ u(x,1)\ =0,\ 0<x<1, \\ u_x(0,y)=0, \quad u_x(2,y)=0,\ \ 0<y<1. \end{cases}$

23. $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, \quad 0<x<\pi,\ 0<y<2, \\ u(x,0)=x\left(\pi^2-x^2\right),\ \ u_y(x,2)\ =0,\ 0<x<\pi, \\ u(0,y)=0, \quad u(\pi,y)=0,\ \ 0<y<2. \end{cases}$

24. $\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < \pi,\ 0 < y < 1, \\ u_y\left(x,0\right) = 0,\ \ u\left(x,1\right) = x^2\left(x-\pi\right)^2,\ 0 < x < \pi, \\ u_x\left(0,y\right) = 0, \quad u_x\left(\pi,y\right) = 0,\ \ 0 < y < 1. \end{cases}$

25. $\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < 2,\ 0 < y < 2, \\ u_y\left(x,0\right) = 0,\ \ u\left(x,2\right) = 0,\ 0 < x < 2, \\ u_x\left(0,y\right) = 0, \quad u\left(2,y\right) = 4 - y^2,\ \ 0 < y < 2. \end{cases}$

7.1.18. 18 - өзіндік жұмыс. Лаплас теңдеуі үшін шеңбер ішінде қойылған Дирихле және Нейман есебі

1. $\begin{cases} \Delta u(r,\varphi) = 0,\ \ 0 \le r < 3,\ 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ u(3,\varphi) = \varphi^2 + 2\cdot\varphi.\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ \ |u(0,\varphi| < \infty. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \Delta u(r,\varphi) = 0,\ \ 0 \le r < R\,,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ |u(0,\varphi| < \infty, \\ u_r + hu|_{r=R} = T + p\sin\varphi + q\cos 3\varphi, \\ \text{мұнда } h, T, p, q \text{ берілген тұрақты оң сандар.} \end{cases}$

3. $\begin{cases} \Delta u\left(x,y\right) = 0, \quad x^2 + y^2 = r^2 < R^2, \\ u\left(x,y\right)|_{r=R} = x + xy,\ |u(0,\varphi| < \infty. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \Delta u\left(x,y\right) = 0, \quad x^2 + y^2 = r^2 < R^2, \\ u\left(x,y\right)|_{r=R} = 2(x^2 + y),\ |u(0,\varphi| < \infty. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \Delta u\left(x,y\right) = 0, \quad x^2 + y^2 = r^2 < R^2, \\ u\left(x,y\right)|_{r=R} = 2x^2 - y^2 - x,\ |u(0,\varphi| < \infty. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \Delta u\left(x,y\right) = 0, \quad x^2 + y^2 = r^2 < R^2, \\ u\left(x,y\right)|_{r=R} = 4y^3,\ |u(0,\varphi| < \infty. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \Delta u\left(x,y\right) = 0, \quad x^2 + y^2 = r^2 < R^2, \\ u\left(x,y\right)|_{r=R} = x^2 - 2y^2,\ |u(0,\varphi| < \infty. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \Delta u\left(x,y\right) = 0, \quad x^2 + y^2 = r^2 < R^2, \\ u\left(x,y\right)|_{r=R} = 4xy^2,\ |u(0,\varphi| < \infty. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \Delta u\left(x,y\right) = 0, \quad x^2 + y^2 = r^2 < R^2, \\ u\left(x,y\right)|_{r=R} = \dfrac{1}{R}y^2 + Rxy,\ |u(0,\varphi| < \infty. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \Delta u\left(x,y\right) = 0, \quad x^2 + y^2 = r^2 < R^2, \\ u\left(x,y\right)|_{r=R} = 2x^2 - x - y,\ |u(0,\varphi| < \infty. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \Delta u\left(x,y\right) = 0, \quad x^2 + y^2 = r^2 \le R^2,\ \ 0 \le r < R, \\ \left.\dfrac{\partial u\left(x,y\right)}{\partial r}\right|_{r=R} = a,\ \ a = const,\ |u(0,\varphi| < \infty. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \Delta u\left(x,y\right) = 0, \quad x^2 + y^2 = r^2 \le R^2,\ \ 0 \le r < R, \\ \left.\dfrac{\partial u\left(x,y\right)}{\partial r}\right|_{r=R} = 2x^2 + a,\ \ a = const,\ |u(0,\varphi| < \infty. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \Delta u\,(x,y) = 0, \quad x^2+y^2=r^2 \le R^2, \;\; 0 \le r < R, \\ \left.\dfrac{\partial u\,(x,y)}{\partial r}\right|_{r=R} = 2xy \,|u(0,\varphi| < \infty. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \Delta u\,(x,y) = 0, \quad x^2+y^2=r^2 \le R^2, \;\; 0 \le r < R, \\ \left.\dfrac{\partial u\,(x,y)}{\partial r}\right|_{r=R} = ay^2 - b, \;\; a,b = const, \;\; |u(0,\varphi| < \infty. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \Delta u\,(x,y) = 0, \quad x^2+y^2=r^2 \le R^2, \;\; 0 \le r < R, \\ \left.\dfrac{\partial u\,(x,y)}{\partial r}\right|_{r=R} = ax^2 - by^2 + y, \;\; a,b = const, \;\; |u(0,\varphi| < \infty. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \Delta u(r,\varphi) = 0, \;\; 0 \le r < R, \; 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ u(r,\varphi)|_{r=R} = a\sin\varphi, \;\; 0 \le \varphi \le 2\pi, \;\; |u(0,\varphi| < \infty. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \Delta u(r,\varphi) = 0, \;\; 0 \le r < R, \; 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ u(r,\varphi)|_{r=R} = a\sin^3\varphi + b, \;\; 0 \le \varphi \le 2\pi, \;\; |u(0,\varphi| < \infty. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \Delta u(r,\varphi) = 0, \;\; 0 \le r < R, \; 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ u(R,\varphi) = \begin{cases} a\sin\varphi, & 0 < \varphi < \pi, \\ \dfrac{a}{3}\sin^3\varphi, & \pi < \varphi < 2\pi, \;\; |u(0,\varphi| < \infty. \end{cases} \end{cases} \quad |u(0,\varphi| < \infty.$

19. $\begin{cases} \Delta u(r,\varphi) = 0, \;\; 0 \le r < R, \; 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ u(r,\varphi)|_{r=R} = 2\sin^2\varphi + 4\cos^3\varphi, \;\; 0 \le \varphi \le 2\pi, \;\; |u(0,\varphi| < \infty. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \Delta u(r,\varphi) = 0, \;\; 0 \le r < R, \; 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ \left.\dfrac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r}\right|_{r=R} = 4\sin^3\varphi, \;\; 0 \le \varphi \le 2\pi, \;\; |u(0,\varphi| < \infty. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \Delta u(r,\varphi) = 0, \;\; 0 \le r < R, \; 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ \left.\dfrac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r}\right|_{r=R} = a\cos 2\varphi, \;\; 0 \le \varphi \le 2\pi, \;\; |u(0,\varphi| < \infty. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \Delta u(r,\varphi) = 0, \;\; 0 \le r < R, \; 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ u(r,\varphi)|_{r=R} = 32(\sin^6\varphi + \cos^6\varphi), \;\; 0 \le \varphi \le 2\pi, \;\; |u(0,\varphi| < \infty. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \Delta u(r,\varphi) = 0, \;\; 0 \le r < R, \; 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r} + u\right|_{r=R} = \sin\varphi + \cos 4\varphi, \;\; 0 \le \varphi \le 2\pi, \;\; |u(0,\varphi| < \infty. \end{cases}$

24. $\begin{cases} \Delta u(r,\varphi) = 0, \;\; 0 \le r < 1, \; 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ u(r,\varphi)|_{r=1} = \cos^2\varphi, \;\; 0 \le \varphi \le 2\pi, \;\; |u(0,\varphi| < \infty. \end{cases}$

25. $\begin{cases} \Delta u(r,\varphi) = 0, \;\; 0 \le r < 1, \; 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ u(r,\varphi)|_{r=1} = \cos^4\varphi, \;\; 0 \le \varphi \le 2\pi, \;\; |u(0,\varphi| < \infty. \end{cases}$

7.1.19. 19 - өзіндік жұмыс. Лаплас теңдеуі үшін шеңбер сыртында қойылған Дирихле және Нейман есебі

1. $\begin{cases} \Delta u\,(x,y)=0, \quad x^2+y^2=r^2\geq R^2,\ R\leq r\leq\infty, \\ u\,(x,y)|_{r=R}=y+2xy, \quad |u(x,y|<\infty. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \Delta u\,(x,y)=0, \quad x^2+y^2=r^2\geq R^2, \quad R\leq r\leq\infty, \\ u\,(x,y)|_{r=R}=x^2-y^2, \qquad |u(x,y|<\infty. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \Delta u\,(x,y)=0, \quad x^2+y^2=r^2\geq R^2, \quad R\leq r\leq\infty, \\ u\,(x,y)|_{r=R}=x^2+1, \qquad |u(x,y|<\infty. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \Delta u\,(x,y)=0, \quad x^2+y^2=r^2\geq R^2, \quad R\leq r\leq\infty, \\ u\,(x,y)|_{r=R}=y^2-xy, \qquad |u(x,y|<\infty. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \Delta u\,(x,y)=0, \quad x^2+y^2=r^2\geq R^2, \quad R\leq r\leq\infty, \\ u\,(x,y)|_{r=R}=y^2+x+y, \qquad |u(x,y|<\infty. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \Delta u\,(x,y)=0, \quad x^2+y^2=r^2\geq R^2, \quad R\leq r\leq\infty, \\ u\,(x,y)|_{r=R}=2x^2-x+y, \qquad |u(x,y|<\infty. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \Delta u\,(r,\varphi)=0, \quad x^2+y^2=r^2\geq R^2, \quad R\leq r\leq\infty, \\ u\,(r,\varphi)|_{r=R}=a\sin\varphi, \qquad |u(r,\varphi|<\infty. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \Delta u\,(r,\varphi)=0, \quad x^2+y^2=r^2\geq R^2, \quad R\leq r\leq\infty, \\ u\,(r,\varphi)|_{r=R}=a\sin^3\varphi+b, \qquad |u(r,\varphi|<\infty. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \Delta u\,(r,\varphi)=0, \quad x^2+y^2=r^2\geq R^2, \quad R\leq r\leq\infty, \\ u\,(r,\varphi)|_{r=R}=\begin{cases} a\sin\varphi, & 0<\varphi<\pi, \\ \dfrac{a}{3}\sin^3\varphi, & \pi<\varphi<2\pi. \end{cases}, \qquad |u(r,\varphi|<\infty. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \Delta u\,(r,\varphi)=0, \quad x^2+y^2=r^2\geq R^2, \quad R\leq r\leq\infty, \\ u\,(r,\varphi)|_{r=R}=8\cos^4\varphi, \qquad |u(r,\varphi|<\infty. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \Delta u\,(r,\varphi)=0, \quad x^2+y^2=r^2\geq R^2, \quad R\leq r\leq\infty, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R}=\sin\varphi+4\sin^3\varphi, \qquad |u(r,\varphi|<\infty. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \Delta u\,(r,\varphi)=0, \quad x^2+y^2=r^2\geq R^2, \quad R\leq r\leq\infty, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}-u\right|_{r=R}=1+\cos 2\varphi, \qquad |u(r,\varphi|<\infty. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \Delta u\,(r,\varphi)=0, \quad x^2+y^2=r^2\geq R^2, \quad R\leq r\leq\infty, \\ u\,(r,\varphi)|_{r=R}=\begin{cases} 1, & 0\leq\varphi<\pi, \\ -1, & \pi<\varphi\leq 2\pi. \end{cases}, \qquad |u(r,\varphi|<\infty. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \Delta u=0, \quad 1<r<+\infty, \quad 0\leq\varphi<2\pi, \\ u\,(r,\varphi)|_{r=1}=\sin^3\varphi, \quad 0\leq\varphi\leq 2\pi. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 1 < \rho < 2, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \\ \quad u(1,\varphi) = 0, \\ \quad u(2,\varphi) = \cos\varphi \end{cases} \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$

16. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 1 < \rho < 2, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \\ \quad u(1,\varphi) = 2, \\ \quad u(2,\varphi) = 1, \end{cases} \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$

17. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 1 < \rho < 2, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \\ \quad u(1,\varphi) = \cos\varphi, \\ \quad u(2,\varphi) = \sin\varphi \end{cases} \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$

18. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad R < r < +\infty, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \\ u(r,\varphi)|_{r=R} = \sin^3\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, \quad x^2 + y^2 = r^2 \ge R^2, \ R \le r \le \infty, \\ u(x,y)|_{r=R} = x + a, \quad |u(x,y| < \infty. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, \quad x^2 + y^2 = r^2 \ge R^2, \ R \le r \le \infty, \\ u(x,y)|_{r=R} = ax + by + c, \quad |u(x,y| < \infty. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, \quad x^2 + y^2 = r^2 \ge R^2, \ R \le r \le \infty, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x,y)\Big|_{r=R} = ax + by + c, \quad |u(x,y| < \infty. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad R = 1 < r < +\infty, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \\ \frac{\partial u}{\partial r}(r,\varphi)\Big|_{r=1} = 2\cos^2\varphi - 1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad R < r < +\infty, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \\ u(r,\varphi)|_{r=1} = c + a\cos\varphi + b\sin\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \ a, b, c = const. \end{cases}$

24. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad R < r < +\infty, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \\ \frac{\partial u}{\partial r}(r,\varphi)\Big|_{r=1} = c + a\cos\varphi + b\sin\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \ a, b, c = const. \end{cases}$

25. $\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, \quad x^2 + y^2 = r^2 \ge R^2, \ R \le r \le \infty, \\ u(x,y)|_{r=R} = x^3, \quad |u(x,y| < \infty. \end{cases}$

7.1.20. 20 - өзіндік жұмыс. Лаплас немесе Фурьенің интегралдық түрлендірулер әдісі

1. $\begin{cases} u_t = u_{xx} + u + B\cos x, \quad x > 0, \ t > 0, \\ u(0,t) = Ae^{-3t}, \quad u_x(0,t) = 0, \quad A, B = const. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 9u_{xx} + 4u_{tt} = 36e^{2x}\sin 3t, \quad x > 0, \ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u_x(0,t) = \sin 3t, \ t > 0; \ u(x,0) = 0, \ u_t(x,0) = 3xe^{2x}, \ x > 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2u_{xx} + 5u_{xt} + 3u_{tt} = 0, \quad x > 0, \ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \ u_x(0,t) = f(t), \ t > 0, \ u(x,0) = g(x), \ u_t(x,0) = 0 \ \ x > 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \ \ -\infty < x < \infty, \ \ t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x), \ \ \ u_t(x,0) = \mu(x), \ \ -\infty < x < \infty. \end{cases}$

5. $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \ \ -\infty < x < \infty, \ \ t > 0; \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \ \ -\infty < x < \infty. \end{cases}$

6. $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \ \ -\infty < x < \infty, \ \ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \ \ -\infty < x < \infty. \end{cases}$

7. $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \ \ 0 < x < \infty, \ \ t > 0, \\ u(0,t) = \mu(t), \ t > 0; \ \ u(x,0) = 0, \ \ 0 < x < \infty. \end{cases}$

8. $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \ \ 0 < x < \infty, \ \ t > 0, \\ u_x(0,t) = \mu(t), \ t > 0; \ \ u(x,0) = 0, \ \ 0 < x < \infty. \end{cases}$

9. $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \ \ 0 < x < \infty, \ \ t > 0; \\ u(0,t) = 0, \ t > 0; \ \ u(x,0) = 0, \ \ 0 < x < \infty. \end{cases}$

10. $\begin{cases} u_t = u_{xx} + a^2 u + f(x), \ \ \ 0 < x, t < \infty, \\ u(0,t) = u_x(0,t) = 0, \ \ \ 0 < t < \infty. \end{cases}$

11. $\begin{cases} u_{xx} - u_t + u = x, \ \ \ 0 < x, t < \infty, \\ u(0,t) = t, \ \ \ u_x(0,t) = 0 \ \ 0 < t < \infty. \end{cases}$

12. $\begin{cases} u_{xx} - u_t + u = f(x), \\ u(0,t) = t, \ \ u_x(0,t) = 0, \ \ \ 0 < x, \ \ t < \infty \end{cases}$

13. $\begin{cases} u_{xx} + u_{xt} = 0, \ \ \ 0 < x, \ \ t < \infty, \\ u(0,t) = \mu(t), \ \ u_x(0,t) = 0, \\ u(x,0) = \phi(x), \ \ \mu(0) = \phi(0) = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \ \ -\infty < x < \infty, \ \ t > 0, \\ u(x,0) = 0, \ -\infty < x < \infty, \\ \lim\limits_{x \to \pm\infty} u = \lim\limits_{x \to \pm\infty} u_x = 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \ \ \ 0 < x < \infty, \ \ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \ 0 < x < \infty, \\ u(0,t) = 0, \ \ \ 0 < t < \infty. \end{cases}$

16. $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \ \ \ 0 < x, \ \ t < \infty, \\ u(x,0) = \varphi(x), \ 0 < x < \infty, \\ u_x(0,t) = 0, \ \ \ 0 < t < \infty. \end{cases}$

17. $\begin{cases} u_{tt} = 16 u_{xx}, \ \ 0 < x < \infty, \ \ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \ \ t \geq 0, \\ u_t(x,0) = 0, \ \ \ \ \ \ 0 \leq x < \infty, \ \ u(x,0) = \begin{cases} \sin \pi x, \ \ \ 0 \leq x \leq 4 \\ 0, \ \ x > 4. \end{cases} \end{cases}$

18. $\left\{\begin{array}{l} u_{tt} = 144u_{xx}, \ \ -\infty < x < \infty, \ \ t > 0, \\ u\left(x,0\right) = e^{-5|x|}, \ \ u_t\left(x,0\right) = 0, \ \ -\infty < x < \infty. \end{array}\right.$

19. $\left\{\begin{array}{l} u_{tt} = 16u_{xx}, \ \ -\infty < x < \infty, \ \ t > 0, \\ u\left(x,0\right) = 0, \ \ -\infty < x < \infty, \ \ u_t\left(x,0\right) = \left\{\begin{array}{ll} \sin\left(x\right), & -\pi \le x \le \pi \\ 0, & |x| > \pi. \end{array}\right. \end{array}\right.$

20. $\left\{\begin{array}{l} u_{tt} = 9u_{xx}, \ \ -\infty < x < \infty, \ \ t > 0, \\ u\left(x,0\right) = 0, \ \ -\infty < x < \infty, \ \ u_t\left(x,0\right) = \left\{\begin{array}{l} e^{-2x}, \ \ x \ge 1, \\ 0, \ \ x < 1. \end{array}\right. \end{array}\right.$

21. $\left\{\begin{array}{l} u_{tt} = 9u_{xx}, \ \ 0 < x < \infty, \ \ t > 0, \\ u_x\left(0,t\right) = 0, \ \ t > 0, \\ u\left(x,0\right) = \left\{\begin{array}{l} x\left(1-x\right), \ \ 0 \le x \le 1 \\ 0, \ \ x > 1, \end{array}\right. \qquad u_t\left(x,0\right) = 0, \ \ 0 < x < \infty. \end{array}\right.$

22. $\left\{\begin{array}{l} u_{xx} - u_y + 4u = \cos x, \ \ \ x, \ y > 0, \\ u\left(0,y\right) = \ u_x\left(0,y\right) = 0, \ \ y > 0. \end{array}\right.$

23. $\left\{\begin{array}{l} u_{xx} - u_y + u + 2\sin x = 0, \ \ \ x, \ y > 0, \\ u\left(0,y\right) = \ 0, \ \ u_x\left(0,y\right) = 1 - 2e^{-5y}, \ \ y > 0. \end{array}\right.$

24. $\left\{\begin{array}{l} u_{xx} + u_{yy} = 2e^{x}\sin y, \ \ \ x, \ y > 0, \\ u\left(0,y\right) = \ 0, \ \ u_x\left(0,y\right) = \sin y, \ \ y > 0, \\ u(x,0) = 0, \ \ u_y(x0) = xe^{x}, \ \ x > 0. \end{array}\right.$

25. $\left\{\begin{array}{l} u_x - \sin x u_y = \sin x \sin y, \ \ x, \ y > 0, \\ u\left(x,0\right) = \cos x, \ \ x > 0. \end{array}\right.$

7.2 Өзіндік жұмыстардың жауаптары

7.2.1. 1 - жеке өзіндік жұмыс. Типін анықтау канондық түрге келтіру, $n = 2$.

1a. гиперболалық, $\xi = x+y,\ \eta = 3x-y,\ u_{\xi\eta}+\frac{1}{2}u_\xi = 0$; **1b**. эллипстік, $\xi = 2x-y,\ \eta = x,\ u_{\eta\eta}+u_{\xi\xi}+u_\eta = 0$; **1c**. параболалық, $\xi = x,\ \eta = xy,\ u_{\xi\xi}+\frac{1}{\xi}u_\xi = 0$. **2a**. гиперболалық, $\xi = 2x+\sin x+y,\ \eta = 2x-\sin x-y,\ u_{\xi\eta}+\frac{\eta-\xi}{32}\left(u_\xi - u_\eta\right) = 0$; **2b**. эллипстік, $\xi = x+y,\ \eta = \sqrt{2}x,\ u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+u_\xi+3u = 0$; **2c**. параболалық, $\xi = y-6x,\ \eta = x,\ u_{\eta\eta}-u_\eta = 0$. **3a**. гиперболалық, $\xi = xy, \eta = \frac{y}{x},\ u_{\xi\eta}+\frac{1}{2\eta}u_\xi = 0$; **3b**. эллипстік, $\xi = x + 2y,\ \eta = 3x,\ u_{\eta\eta} + u_{\xi\xi} + \frac{1}{6}\left(u_\xi + u_\eta\right) = 0$; **3c**. параболалық, $\xi = 5y + x, \eta = x,\ 25u_{\eta\eta} + 5u_\xi + 2u = \xi + \eta$. **4a**. гиперболалық, $\xi = x + y,\ \eta = 3x + 2y,\ u_{\xi\eta} = 0$; **4b**. эллипстік, $\xi = \frac{x+y}{2},\ \eta = x,\ u_{\eta\eta} + u_{\xi\xi} + \frac{3}{2}u_\xi + 3u_\eta + 1 = 0$; **4c**. параболалық, $\eta = x, \xi = y^2 - x^2,\ u_{\eta\eta} - \frac{2\eta^2}{\xi+\eta^2}u_\xi = 0$. **5a**. гиперболалық,, $\xi = x - y,\ \eta = xy,\ \left(\xi^2 + 4\eta\right) u_{\xi\eta} + \xi u_\eta = 0$; **5b**. эллипстік, $\xi = x,\ \eta = \frac{1}{2}\left(-x + y\right),\ u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - 32u = 0$; **5c**. параболалық, $\xi = x + y,\ \eta = x,\ u_{\xi\xi} + 18u_\xi + 9u_\eta - 9u = 0$. **6a**. гиперболалық, $\xi = y - x,\ \eta = 2y - x,\ u_{\xi\eta} + 3u_\xi - u_\eta + 2u = 0$; **6b**. эллипстік, $\xi = x^2 - y^2,\ \eta = x^2,\ u_{\eta\eta}+u_{\xi\xi}+\frac{1}{\xi-\eta}u_\xi+\frac{1}{2\eta}u_\eta = 0$; **6c**. параболалық, $\xi = x-2y,\ \eta = x,\ u_{\eta\eta}+u_\xi = 0$. **7a**. гиперболалық, $\xi = x,\ \ \eta = \frac{-x+2y}{3},\ u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} - 3u_\xi - 5u_\eta + 27\xi = 0$; **7b**. эллипстік, $\xi = y - x,\ \eta = x^2 - x,\ u_{\eta\eta} + u_{\xi\xi} = -\left(\frac{2}{1+4\eta}\right)u_\eta$; **7c**. параболалық, $\xi = y - 2x,\ \eta = x,\ u_{\eta\eta} - 2u_\xi + u_\eta + 3\eta = 0$. **8a**. гиперболалық, $\xi = x - y,\ \eta = 3x + y,\ u_{\xi\eta} - \frac{1}{16}\left(u_\xi - u_\eta\right) = 0$; **8b**. эллипстік, $\xi = x\ \eta = y - \cos x,\ u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \cos\xi u_\eta = 0$; **8c**. параболалық, $\xi = xe^y,\ \eta = y,\ u_{\eta\eta} - \xi u_\xi = 0$. **9a**. гиперболалық, $\xi = 2y - x,\ \eta = y^2 + x,\ 2\left(1 + \xi + \eta\right) u_{\xi\eta} = -u_\eta$; **9b**. эллипстік, $\xi = y + 3x,\ \eta = 2x,\ u_{\eta\eta} + u_{\xi\xi} = 0$; **9c**. параболалық, $\xi = y - x^2,\ \eta = x,\ \eta\left(\xi + \eta^2\right) u_{\eta\eta} = u + 2\eta\left(\xi + \eta^2\right) u_\xi = 0$. **10a**. гиперболалық, $\xi = x - y,\ \eta = x + 3y,\ u_{\xi\eta} + \frac{1}{4}u_\eta = 0$; **10b**. эллипстік, .$\xi = 2y - x,\ \eta = y,\ u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_\eta = 0$; **10c**. параболалық, $\xi = \frac{y}{x},\ \eta = y,\ u_{\eta\eta} + \frac{2\xi^2}{\eta^2}u_\xi + \frac{1}{\eta}e^\xi = 0$. **11a**. гиперболалық, $\xi = x + 2y,\ \ \eta = 3x + 2y,\ u_{\xi\eta} - \frac{1}{4}u_\eta = 0$; **11b**. эллипстік, $\xi = y - 2x,\ \ \eta = \sqrt{6}x,\ u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 15u_\xi - 4\sqrt{6}u_\eta + \frac{1}{3}\xi + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta = 0$; **11c**. параболалық, $\xi = y\sin x,\ \ \eta = y,\ \ u_{\eta\eta} - \frac{2\xi}{\eta^2}u_\xi = 0$. **12a**. гиперболалық,, $\xi = x + 3y,\ \ \eta = x + y,\ u_{\xi\eta} + \frac{1}{2}u_\eta = 0$; **12b**. эллипстік, $\xi = y^2,\ \eta = x^2 u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$; **12c**. параболалық, $\xi = y - 3x,\ \ \eta = x,\ u_{\eta\eta}+u_\eta = 0$. **13a**. гиперболалық,, $\xi = 4x-y,\ \ \eta = y,\ u_{\xi\eta}+\frac{1}{4}u_\xi = 0$; **13b**. эллипстік, $\xi = 2\sqrt{y},\ \eta = -x,\ u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \xi^2 u_\eta - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{\xi}\right)u_\xi$; **13c**. параболалық, $\xi = 2x - y,\ \eta = x,\ u_{\eta\eta} + u_\eta = 0$. **14a**. гиперболалық, $\xi = x - 2\sqrt{-y},\ \eta = -x - 2\sqrt{-y},\ u_{\xi\eta} = \frac{1}{16}\left(\xi + \eta\right)^2\left(u_\eta - u_\xi\right) - \frac{1}{\xi+\eta}\left(u_\eta + u_\xi\right)$; **14b**. эллипстік, $\xi = \frac{1}{3}\left(5y - x\right),\ \eta = x,\ u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \frac{1}{75}\left(12\eta - 36\xi - 50u_\xi\right)$; **14c**. параболалық, $\xi = y - 3x,\ \eta = x,\ u_{\eta\eta} - u + 5 = 0$. **15a**. гиперболалық, $\xi = 9x + y,\ \ \eta = x + y,\ u_{\xi\eta} + \frac{1}{64}\left(9u_\xi + u_\eta\right) = 0$; **15b**. эллипстік, $\xi = x^{\frac{3}{2}},\ \eta = \frac{3}{2}y,\ u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{3\xi}u_\xi = 0$; **15c**. параболалық, $\xi = \frac{y^2}{2} + x,\ \eta = y,\ u_{\eta\eta} - 6u_\eta = 0$. **16a**. гиперболалық, $\xi = 3x - y,\ \eta = 2x - y,\ u_{\xi\eta} = 0$; **16b**. эллипстік,

$\xi = y - x,\ \eta = x,\ u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 2u_\eta = u + (\xi - \eta)^2 + \eta$; **16c**. параболалық, $\xi = \frac{y}{x},\ \eta = y,\ \ u_{\eta\eta} = 0$, **17a**. гиперболалық, $\eta = yx^3,\ \xi = \frac{y}{x},\ \ u_{\xi\eta} - \frac{1}{4\eta}u_\eta = 0$; **17b**. эллипстік, $\xi = y,\ \ \eta = 2x,\ u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - 0,75u_\xi + 0,5u_\eta + 0,25u = \xi$; **17c**. параболалық, $\xi = y + x,\ \ \eta = y.u_{\eta\eta} = u_\eta - u + (\xi - \eta)\,\eta$. **18a**. гиперболалық, $\xi = y - x^2,\ \eta = y^2 + x^2,\ x^2\,(1 + 2y)\,u_{\eta\xi} + \left(2x^2 - y\right)u_\eta = 0$; **18b**. эллипстік, $\xi = \frac{3}{5}x + y,\ \ \eta = -\frac{1}{5}x,\ u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 5u_\xi + 5u = 0$; **18c**. параболалық, $\xi = x + 3y,\ \ \eta = x,\ \ u_{\eta\eta} + \frac{1}{3}u_\eta = 0$. **19a**. гиперболалық, $\xi = y - x,\ \eta = y - 7x,\ \ u_{\xi\eta} - \frac{1}{36}\left[u_\xi - 5u_\eta + 3u + \frac{1}{6}\,(7\xi - \eta)\right] = 0$; **19b**. эллипстік, $\xi = y + 2x,\ \ \eta = x$ $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - 5u_\xi - 3u_\eta + u = 0$; **19c**. параболалық, $\xi = \frac{y^2}{2} + x,\ \eta = y,\ \ u_{\eta\eta} - 6\eta = 0$. **20a**. гиперболалық, $\xi = x + y,\ \eta = y - 3x,\ \ u_{\xi\eta} = 0$; **20b**. эллипстік, $\xi = y - \frac{1}{2}x,\ \eta = -\frac{3}{2}x,\ u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \frac{2}{3}u_\xi - \frac{1}{9}u + \frac{8\eta^2}{81}$; **20c**. параболалық, $\xi = e^{-x} - e^{-y},\ \eta = x,\ \ u_{\eta\eta} - \frac{\xi}{1 - \xi e^\eta}u_\xi = 0$. **21a**. гиперболалық, $\xi = x - y,\ \eta = xy,\ \ \left(\xi^2 + 4\eta\right)u_{\xi\eta} + \xi u_\eta = 0$; **21b**. эллипстік, $\xi = -2e^{-y/2},\ \eta = -2e^{-x/2}$, $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{\xi}u_\xi + \frac{1}{\eta}u_\eta - u = 0$; **21c**. параболалық, $\xi = x + y,\ \ \eta = y,\ \ u_{\eta\eta} - u_\eta = 0$. **22a**. гиперболалық, $\xi = y - 3x,\ \ \eta = y + 7x,\ 100u_{\xi\eta} + 10u_\xi - 11u_\eta - 5u + \left(\frac{\eta - \xi}{10}\right)^2 = 0$; **22b**. эллипстік, $\xi = \arg tgx,\ \eta = y,\ u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$; **22c**. параболалық, $\xi = y - 2x,\ \ \eta = x,\ \ u_{\eta\eta} - 1,5u_\eta = 0$. **23a**. гиперболалық, $\xi = x + y - \cos x,\ \eta = x - y + \cos x,\ u_{\xi\eta} = 0$; **23b**. эллипстік, $\xi = x + y,\ \eta = x,\ u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$; **23c**. параболалық, $\xi = y + 2x,\ \eta = x,\ \ u_{\eta\eta} - \frac{1}{2}u_\eta - u = 0$. **24a**. гиперболалық, $\xi = y - 3x, \eta = y - \frac{1}{3}x, u_{\xi\eta} = \frac{3}{16}$; **24b**. эллипстік, $\xi = -3x - y,\ \ \eta = 2x,\ \ u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$; **24c**. параболалық, $\xi = 2x - y^2,\ \eta = y,\ \ u_{\eta\eta} - 2u_\xi = 0$; **25a**. гиперболалық, $\xi = x + \arctan y,\ \eta = x - \arctan y,\ u_{\xi\eta} = 0$; **25b**. эллипстік, $\xi = x,\ \eta = 3x + y,\ \ u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_\xi = 0$; **25c**. параболалық, $\xi = y - 2x,\ \ \eta = x,\ \ u_{\eta\eta} + \frac{3}{2}u_\eta = 0$.

7.2.2. 2 - өзіндік жұмыс. Типін анықтау канондық түрге келтіру, $n \geq 3$.

1. $u_{\xi\xi} + 2u_{\eta\eta} - u_{\zeta\zeta} - u_{\tau\tau} + u = 0;\ \ \xi = x + y,\ \eta = y - z,\ \ \zeta = y + z + t,\ \ \tau = z - t.$

2. $u_{\xi\xi} - 3u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} - 3u = 0;\ \ \xi = 2x - y,\ \eta = y + z,\ \ \zeta = y + z + t,\ \ \tau = t.$

3. $u_{\xi\xi} - 2u_\xi = 0;\ \ \xi = x,\ \ \eta = -2x + y,\ \ \zeta = -3x + z.$

4. $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} - u_{\zeta\zeta} = 0;\ \ \xi = x + y,\ \eta = x + y - z,\ \ \zeta = -x + y.$

5. $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} - 2u_\eta = 0;\ \ \ \xi = x + y,\ \eta = -x + y,\ \ \zeta = z.$

6. $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_{\varsigma\varsigma} = 0;\ \ \xi = x, \eta = y - x, \varsigma = x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z.$

7. $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_{\varsigma\varsigma} + u_\eta = 0;\ \ \xi = \frac{x}{2}, \eta = \frac{x}{2} + y, \varsigma = -\frac{x}{2} - y + z.$

8. $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + 2u_\xi = 0;\ \ \xi = x + y, \eta = y - x, \varsigma = y + z.$

9. $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0;\ \ \xi = x, \eta = y - x, \varsigma = 2x - y + z.$

10. $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} - u_{\varsigma\varsigma} = 0;\ \ \xi = x, \eta = y - x, \varsigma = \frac{3}{2}x - \frac{y}{2} + \frac{z}{2}.$

11. $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+u_{\varsigma\varsigma}+u_{\tau\tau}=0$; $\xi=x$, $\eta=y-x$, $\varsigma=z+x+y$, $\tau=2x-2y+z+t$.

12. $u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}+u_{\varsigma\varsigma}+u_{\tau\tau}=0$; $\xi=x+y$, $\eta=y-x$, $\varsigma=z$, $\tau=y+z+t$.

13. $u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}+u_{\varsigma\varsigma}-u_{\tau\tau}=0$; $\xi=x+y$, $\eta=x-y$, $\varsigma=-2y+z+t$, $\tau=z-t$.

14. $u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}+u_{\varsigma\varsigma}=0$; $\xi=x$, $\eta=y-x$, $\varsigma=2x-y+z$, $\tau=x+z+t$.

15. $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=0$; $\xi=x$, $\eta=y$, $\varsigma=-x-y+z, \tau=x-y+t$.

16. $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+u_{\varsigma\varsigma}=0$; $\xi=x$, $\eta=-x+y$, $\varsigma=2x-2y+z$.

17. $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-u_{\varsigma\varsigma}+3u_{\xi}+\dfrac{3}{2}u_{\eta}-\dfrac{9}{2}u_{\varsigma}=0$; $\xi=x$, $\eta=\dfrac{1}{2}\left(x+y+z\right), \varsigma=-\dfrac{1}{2}\left(3x+y-z\right).$

18. $u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}-u_{\varsigma\varsigma}+2u_{\eta}=0$; $\xi=x+y$, $\eta=-x+y$, $\varsigma=-x-y+z$.

19. $u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}+4u=0$; $\xi=y+z$, $\eta=-y-2z$, $\varsigma=x-z$.

20. $u_{\xi\xi}+2u=0$; $\xi=x$, $\eta=-2x+y$, $\varsigma=-x+z$.

21. $u_{\xi\xi}-2u_{\xi}+6u_{\varsigma}=0$; $\xi=x$, $\eta=-2x+y$, $\varsigma=-3x+z$.

22. $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-u_{\varsigma\varsigma}=0$; $\xi=x$, $\eta=-\frac{7}{2}x-\frac{1}{2}z$, $\varsigma=\frac{1}{2}x+2z$.

23. $u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}+u_{\varsigma\varsigma}=0$; $\xi=x$, $\eta=-\frac{1}{2}\left(x-y\right), \varsigma=-x-y+z$.

24. $u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}=0$; $\xi=x$, $\eta=x+y$, $\varsigma=-3x-2y+z$.

25. $u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}-u_{\varsigma\varsigma}-u_{\tau\tau}=0$; $\xi=x+y$, $\eta=x-y$, $\varsigma=z-x-y$, $\tau=t-x-y$.

7.2.3. 3 - өзіндік жұмыс. Сипаттауыштар әдісі. Гиперболалық типті теңдеулер үшін жалпылама Коши есебі

1. $u\left(x,y\right)=\frac{x^3\left(y^4-1\right)}{4}+x^2-2.$

2. $u=e^{-\frac{x}{3}}\left(-12y-4x-54\right)+14y-14x+54.$

3. $u=e^{\frac{y}{3}}\left(6x+4y+24\right)-3x-6y-24.$

4. $u=e^{-\frac{1}{5}x}\left(-25y+5x-110\right)+27y-27x+110.$

5. $u=-\frac{3}{7}e^{-\frac{7}{3}x}\left(x+3y+3\right)+\frac{1}{7}\left(16-18x+9y\right).$

6. $u\left(x,y\right)=3\sin^2 x-\left(x+6y\right)\sin x+3x^2+3y^2+xy.$

7. $u\left(x,y\right)=\frac{\left(y-3x\right)^2}{4}+\frac{3}{4}\left(y+x\right)^2=3x^2+y^2.$

8. $u\left(x,y\right)=2\left(x+y\right)-5+5e^{-\frac{1}{6}\left(x+y\right)-\frac{y-5x}{30}}=2\left(x+y\right)-5+5e^{-\frac{y}{5}}.$

9. $u\left(x,y\right)=\frac{3}{2}\cos\frac{\cos y+2y-x}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\cos y-2y-x}{2}.$

10. $\xi=xy^4,\quad \eta=x,\quad u=4x^3+x\left(y^8-1\right).$

11. $\xi=xy^2,\quad \eta=x,\quad u=x^4+\frac{3}{4}x^3\left(y^4-1\right).$

12. $\xi=xy,\quad \eta=y,\quad u=3y^4+\left(x^2-1\right)y^5.$

13. $\xi=x^3y,\quad \eta=x,\quad u=4x^4+x^8\left(y^2-1\right).$

14. $\xi=\frac{y}{x},\quad \eta=y,\quad u=2y+1+y\ln x.$

15. $\xi=xy^4,\quad \eta=x,\quad u=x^2+y^4.$

16. $u=5\sin\frac{x+y}{2}-3\sin\frac{5x+y}{6}.$

17. $u=x-y-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2y}.$

18. $u=\frac{1}{2}\left[1-x-3y+\left(x+y-1\right)e^{2x}\right].$

19. $u=xy+\frac{3}{2}\sin\frac{2y}{3}\cos\left(x+\frac{y}{3}\right).$

20. $\xi=x^2y,\quad \eta=xy,\quad u=1+2x^2y^2.$

21. $\xi = 2x-y+\cos x \quad \eta = 2x+y-\cos x,\quad u = \sin x\cdot\cos\left(\frac{y-\cos x}{2}\right)+ e^x sh\left(\frac{y-\cos x}{2}\right)$

22. $\xi=x^2y,\quad \eta=xy,\quad u=x\left(1+y\right)$

23. $\xi=xy^{\frac{1}{4}},\quad \eta=xy^{\frac{3}{4}},\quad u=\left(x^4+x^{\frac{8}{3}}\right)y^2.$

24. $\xi=x+y+\cos x,\quad \eta=x-y-\cos x,$
    $u=1+\sin\left(x-y-\cos x\right)+e^{y+\cos x}\sin\left(x+y+\cos x\right)$

25. $\xi=x+y+\cos x,\quad \eta=x-y-\cos x,\quad u=1+\cos x\cdot\cos\left(y+\cos x\right)$

7.2.4. 4 - өзіндік жұмыс. Гурса есебі.

1. $u(x,y)=y^2+\frac{1}{2}x^2\left(1+e^{-y}\right).$

2. $u(x,y)=y+\psi\left(x\right)+[\varphi\left(y\right)-\varphi\left(0\right)-y]e^{-x}.$

3. $u(x,y)=1+\left(x+2y\right)\exp\{\frac{1}{3}\left(y-x\right)\}.$

4. $u(x,y)=\varphi\left(\frac{5x-y}{4}\right)+\psi\left(\frac{y-x}{4}\right)-\varphi\left(0\right).$

5. $u(x,y)=2x\sqrt{-y}.$

6. $u(x,y)=x^2+\left(y-1+e^x\right)^2.$

7. $u(x,y)=xy\left(x+y\right)^2.$

8. $u(x,y) = y.$

9. $u(x,y) = 3x + y^3.$

10. $u(x,y) = x.$

11. $u(x,y) = \sqrt{xy} + \frac{1}{2}\ln\frac{x}{y}.$

12. $u(x,y) = \sqrt[4]{\frac{y^5}{x}}.$

13. $u(x,y) = -1 + 2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y-\cos x}{2}.$

14. $u(x,y) = \frac{4}{3}x^2 - x^2 + y - \frac{1}{3}y^2.$

15. $u(x,y) = x - \sqrt{y}.$

16. $u(x,y) = e^{\frac{x-y}{2}}\left(1 + \frac{x-y}{2}\right).$

17. $u(x,y) = \varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) + \psi\left(\frac{x-y}{2}\right) - \varphi(0).$

18. $u(x,y) = \varphi\left(\frac{x-y}{2}\right) + \psi\left(\frac{x+y}{2}\right) - \varphi\left(0\right).$

19. $u(x,y) = \varphi\left(\frac{5x-y}{4}\right) + \psi\left(\frac{y-x}{4}\right) - \varphi\left(0\right).$

20. $u(x,y) = \varphi\left(\frac{y-x-3}{4}\right) + \psi\left(\frac{5x-y-1}{4}\right) - \varphi\left(-1\right).$

21. $u(x,y) = \varphi\left(\frac{-y-2x}{2}\right) + \psi\left(\frac{y+4x+2}{2}\right) - \varphi\left(1\right).$

22. $u(x,y) = \varphi\left(\frac{x+3y+3}{4}\right) + \psi\left(\frac{3x-3y-1}{4}\right) - \varphi\left(\frac{1}{2}\right).$

23. $u(x,y) = \varphi\left(\frac{3x+2y+1}{2}\right) + \psi\left(-\frac{x+2y+2}{2}\right) - \varphi\left(\frac{1}{2}\right).$

24. $u(x,y) = \varphi\left(\frac{6x-3y-2}{7}\right) + \psi\left(\frac{x+3y+3}{7}\right) - \varphi\left(\frac{1}{7}\right).$

25. $u(x,y) = \varphi\left(\frac{x+5y+4}{3}\right) + \psi\left(\frac{2x-5y-3}{3}\right) - \varphi\left(\frac{1}{3}\right).$

7.2.5. 5 - өзіндік жұмыс. Толқындық теңдеу үшін Коши есебі, $n = 1$.

1. $4.1.u(x,t) = (\sin(x+t) + xt - x\sin t).$

2. $u(x,t) = \sin(x+t) + xt - e^x(1 - cht).$

3. $u(x,t) = 3t + 6x^2t^2 + t^4 + e^{-t}cht.$

4. $u(x,t) = \sin x\cos t + xt + t + \cos x(1 - \cos t).$

5. $u(x,t) = x + xt^3 + \sin x\sin t.$

6. $u(x,t) = 2t - \sin 2t + \cos(x-t)$.

7. $u(x,t) = (x+2t)^2$.

8. $u(x,t) = x(t - \sin t) + \sin(x+t)$.

9. $u(x,t) = \frac{t}{\omega} - \frac{1}{\omega^2} \sin \omega t$.

10. $u(x,t) = x + xt^3 + \sin x \sin t$.

11. $u(x,t) = \frac{1}{a^2\omega^2} (1 - \cos a\omega t) \sin \omega x$.

12. $u(x,t) = 3(e^{-t} - 1 + t) + \sin(x+t)$.

13. $u(x,t) = 1 + t + \frac{1}{9} (1 - \cos 3t) \sin x$.

14. $u(x,t) = 2t - \sin 2t + \cos(x-t)$.

15. $(x+1)\,t + \sin x \cos ct + \left(1/c^2\right) \cos x \,(1 - \cos ct)$.

16. $u\,(x,t) = \frac{t^3}{6} + \frac{xt^2}{2} + e^x ch\,(at)$.

17. $u\,(x,t) = t^3 \,\left(\frac{1}{6} \ln t - \frac{5}{36}\right) + 3^x ch(at)$.

18. $u\,(x,t) = \frac{1}{12}\,\left(1 - a^2\right) t^4 + \frac{1}{2}\left[t^2x^2 + (x+at)^m + (x-at)^m\right]$.

19. $u\,(x,t) = \frac{t^4}{12} + \frac{t^2x^2}{2} + \cos x\,(\sin t + \cos t)$.

20. $u\,(x,t) = \frac{1}{2}\left(t \sin(x+t) - \sin x \sin t + \frac{2^{x+t} + 2^{x-t}}{\ln 2}\right)$.

21. $u\,(x,t) = t - t \sin t + \frac{1}{2} arctg \frac{2t}{1+x^2-t^2}$.

22. $u\,(x,t) = (x+2t)^2$.

23. $u(x,t) = x^2 + t^2 + xt + \frac{1}{6} xt^3$.

24. $u(x,t) = \sin x$

25. $u(x,t) = xt + \cos x \sin t - (1 - cht)\, e^x$.

7.2.6. 6 - өзіндік жұмыс. Толқындық теңдеу үшін Коши есебі, $n \geq 2$.

1. $u = \frac{1}{2}\left[e^{-(x+t)^2} + e^{-(x-t)^2} + arctg\,(y+t) + arctg\,(y-t) + (\cos x + \sin y) \sin t\right]$

2. $u = x^2 - y^2 + t^2 \left(xy^2 - x^2y + z^2\,(x-y)\right) + \frac{1}{\sqrt{11}} \sin \sqrt{11} t \sin x \cos\,(y+3z)$.

3. $u = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(arctg\left(x_1 + x_2 + x_3 + t\sqrt{3}\right) - arctg\left(x_1 + x_2 + x_3 - t\sqrt{3}\right)\right)$.

4. $u = \sin x \cos 2t + e^{2z} ch4t$.

5. $u = (yz)^2 + 4t^2\left(y^2+z^2\right) + \frac{16}{3}t^4.$

6. $u = (1-\cos t)\, e^z \cos x \sin y + e^{y+z}\left[sh(t)\sin x + \frac{t}{\sqrt{2}}sh\left(t\sqrt{2}\right) + x^2 ch\left(t\sqrt{2}\right)\right].$

7. $u = xy\cos zt + yze^x \sinh t + \frac{x}{26}\cos(3y+4z)\left(e^t - \cos 5t - \frac{1}{5}\sin 5t\right).$

8. $u = \frac{t^2}{2} + t + 1.$

9. $u = \frac{2}{3}a^2t^3 + \left(4a^2+r^2\right)\left(t-1+e^{-t}\right) + 1 + r^2.$

10. $u = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2 + xyt.$

11. $u = x + ty + t^2.$

12. $u = xyt\left(1+t^2\right) + x^2 - y^2.$

13. $u = \dfrac{1}{2}t^2\left(x^3 - 3xy^2\right) + e^x\cos y + te^y \sin x.$

14. $u = x^2 + t^2 + t\sin y.$

15. $u = 2x^2 - y^2 + \left(2x^2+y^2\right)t + 2t^2 + 2t^3.$

16. $u = x^2 - ty^2 + \dfrac{1}{2}t^2\left(6 + x^3 + y^3\right) + t^3 + \dfrac{3}{4}t^4(x+y).$

17. $u = e^{3x+4y}\left[\frac{26}{25}ch5t - \frac{1}{25} + \frac{1}{5}sh5t\right].$

18. $u = \left(x^2-y^2\right)\left(e^t - 1 - t\right).$

19. $u = yt^2 + \frac{1}{3}xt^3 + xy^2t + x^2y.$

20. $u = x^2 + y^2 - 2z^2 + t + t^2xyz.$

21. $u = y^2 + tz^2 + 8t^2 + \frac{8}{3}t^3 + \frac{1}{12}t^4x^2 + \frac{2}{45}t^6.$

22. $u = x^2y^2z^2 + tzxy + 3t^2\left(x^2+y^2+z^2+x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2\right) + 3t^4\left(\dfrac{3}{2} + x^2 + y^2 + z^2\right) + \dfrac{9}{5t^6}.$

23. $u = e^{x+y}\cos\left(z\sqrt{2}\right) + te^{3y+4z}\sin 5x + t^3e^{x\sqrt{2}}\sin y \cos z.$

24. $u = \dfrac{1}{6}t^3e^{5x}\sin(3y)\cos(4z) + e^{6x+8y}\cos(10z) + e^{3y+4x}\sin(5x).$

25. $u = \cos(bx+cy)\cos\left(a\sqrt{b^2+c^2}t\right) + \frac{1}{a\sqrt{b^2+c^2}}\sin(bx+cy)\sin\left(a\sqrt{b^2+c^2}t\right).$

7.2.7. 7 - өзіндік жұмыс. Шешімнің физикалық интерпретациясы.

Maple, Mathematica, MathLab т.б. компьютерлік бағдарламалар көмегімен орындау керек.

7.2.8. 8 - өзіндік жұмыс. Жылуөткізгіштік теңдеу үшін Коши есебі, $n = 1$.

1. $u(x,t) = e^{-4t}\sin 2x + \frac{1}{4}x\left(1 - e^{-4t}\right).$
2. $u(x,t) = 1 + e^{t} + \frac{1}{2}t^2.$
3. $u(x,t) = \left(3e^{t} - t^2 - 2t - 2\right) chx.$
4. $u(x,t) = xt^2 + t + e^{16t-2x}.$
5. $u(x,t) = (1+t)\, e^{-t}\cos x.$
6. $u(x,t) = cht\sin x.$
7. $u(x,t) = e^{2t}\left(x^4 + 48x^2t + 192t^2\right) + e^{6t-x}.$
8. $u(x,t) = (1+t)^{-\frac{1}{2}}\, e^{\frac{2x-x^2+t}{1+t}}.$
9. $u(x,t) = \dfrac{1}{2}x^2t^2 + \dfrac{x}{3}t^3 + e^{x}\cos(x+8t).$
10. $u(x,t) = (1+t)^{-\frac{1}{2}}\sin\frac{x}{1+t}e^{-\frac{4x^2+t}{4(1+t)}}.$
11. $u(x,t) = e^{-x}\left(e^{t} - t - 1\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2x\cos 4t\right).$
12. $u(x,t) = 2 - e^{-t}.$
13. $u(x,t) = x^2t + \dfrac{19}{2}t^2 + e^{-x}\sin(x - 18t).$
14. $u(x,t) = x^2 + 2x - xe^{-t} + 2t - 1.$
15. $u(x,t) = t^3 + e^{-t}\sin x.$
16. $u(x,t) = \sin x cht.$
17. $u(x,t) = 4t + x^2 + e^{-8t}\cos 2x.$
18. $u(x,t) = e^{x-(h-a^2)t} + \frac{b}{h}\left(1 - e^{-ht}\right).$
19. $u(x,t) = x + e^{2x}\sin 2(x + 40t).$
20. $u(x,t) = e^{x-(h-a^2)t}.$
21. $u(x,t) = e^{4t-3x}.$
22. $u(x,t) = x\cos x - 2\left(1 - e^{-t}\right)\sin x.$
23. $u(x,t) = x(1+4t)^{-\frac{3}{2}}\, e^{-\frac{x^2}{1+4t}}.$
24. $u(x,t) = 1 - \cos t + (1+4t)^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{x^2}{1+4t}}.$
25. $u(x,t) = e^{x-t} + 2(1 - e^{-2t}).$

7.2.9. 9 - өзіндік жұмыс. Жылуөткізгіштік теңдеу үшін Коши есебі, $n \geq 2$.

1. $u = \dfrac{3}{2}xyt^2 + e^{-2t}\sin x \cos y.$

2. $u = xy \sin z e^{-t} + \left(x^2 + y^2\right)\left(1 - e^{-t}\right) + 4\left(t - 1 + e^{-t}\right).$

3. $u = \dfrac{t}{8} + \frac{1}{\sqrt{1+t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{1+t}}.$

4. $u = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cos \frac{xy}{1+t^2} e^{-\frac{t\left(x^2+y^2\right)}{2\left(1+t^2\right)}}.$

5. $u = \left(\frac{1}{2}y^2 + 3t\right) t^2 e^{-x} \sin z.$

6. $u = \dfrac{1}{4}\sin 2z + \frac{\cos 2y}{\sqrt{1+t}} e^{-t-\frac{x^2}{1+t}}.$

7. $u = \dfrac{1}{3}\cos\left(x - y + z\right)\left(1 - e^{-3t}\right) + \frac{1}{\sqrt{1+12t}} e^{-\frac{(x+y-z)^2}{1+12t}}.$

8. $u = y^2 + 18t + e^{-3t}\cos 2x.$

9. $u = \dfrac{1}{\sqrt{1+4t}} e^{-\frac{x^2+16t+64t^2}{1+4t}} sh 3y \cos 5z.$

10. $u = e^{-2x}\sin 2y + 2ye^{16t-2x}.$

11. $u = te^{y-x}\sin x + \left(x^2 + y^2 + z^2\right) z + 10zt.$

12. $u = e^{t-x} - e^{-x} + x^4 + x^2y^2 + 2t(x^2t + y^2) + 16t^2.$

13. $u = e^{x+y-4t}\cos 2z.$

14. $u = \dfrac{\sin z}{\sqrt{1+4t^2}} \cos \frac{xy}{1+4t^2} e^{-t-\frac{t(x^2+y^2)}{1+4t^2}}.$

15. $u = e^{-10t-z}\sin x \cos y.$

16. $u = \dfrac{1}{4}\cos x \left(e^{-2t} - 1 + 2t\right) + \cos y \cos z e^{-4t}.$

17. $u = e^{-t-z}\sin x \cos y.$

18. $u = e^t - 1 + \sin\left(x - y - z\right) e^{-9t}.$

19. $u = \sin t + \dfrac{xy}{\left(1+4t\right)^3} e^{-\frac{x^2+y^2}{1+4t}}.$

20. $u = e^{x+y-10t}\cos 2z.$

21. $u = 1 + \dfrac{1}{5}\sin x \sin y \left(2\sin t - \cos t + e^{-2t}\right).$

22. $u = x^2 - y^2 + \sin x \sin y \left(1 - e^{-2t}\right).$

23. $u = \sin \alpha x \sin \beta y e^{-(\alpha^2+\beta^2)t}.$

24. $u = \sin \alpha x \cos \beta y e^{-(\alpha^2+\beta^2)t}.$

25. $u = \cos \alpha x \cos \beta y e^{-(\alpha^2+\beta^2)t}.$

7.2.10. 10 - өзіндік жұмыс. Жалғастыру әдісі. Толқындық және жылуөткізгіштік теңдеулері үшін жарты өсте берілген Коши есебі

1. $u(x,t) = e^{-a^2 t} \sin x.$

2. $u(x,t) = e^{-4a^2 t} \cos 2x.$

3. $u(x,t) = \left(x + x^3 + 6xt\right) e^{-ht}.$

4. $u(x,t) = \left(1 + x^2 + a^2 t\right) \frac{t^2}{2}.$

5. $u(x,t) = xt^2 \left(\frac{1}{2}x^2 + a^2 t\right).$

6. $u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+2t)^3 + \frac{1}{2}(x-2t)^3 + xt^3, & x \geq 2t, \\ \frac{1}{2}(x+2t)^3 + \frac{3}{8}(x-2t)^3 + xt^3, & x < 2t. \end{cases}$

7. $u(x,t) = \begin{cases} (x-3t)^2 + x + t^2, & x \geq 3t, \\ x + t^2, & x < 3t. \end{cases}$

8. $u(x,t) = x^2 + xt + t^2.$

9. $u(x,t) = 4t^4 + 4t^2 x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \sin 2t \sin x.$

10. $u(x,t) = \begin{cases} 9xt^2 + 27x^3, & 3x \geq t, \\ t^3 + 27tx^2, & 3x < t. \end{cases}$

11. $u(x,t) = x + t + t^2 + \cos x \cos t.$

12. $u(x,t) = \begin{cases} x + t, & x \geq t, \\ 2t + \sin(x-t), & x < t. \end{cases}$

13. $u(x,t) = \begin{cases} x + 3t + e^t - 3\sin t \cos \frac{x}{3}, & x \geq 3t, \\ 2x + e^t - 3\cos t \sin \frac{x}{3}, & x < 3t. \end{cases}$

14. $u(x,t) = \begin{cases} 0, & x \geq 2t, \\ 5 \sin \omega \left(t - \frac{x}{2}\right), & x < 2t. \end{cases}$

15. $u(x,t) = \frac{\sin x}{a^2}(1 - \cos at).$

16. $u(x,t) = 1 + xt + t^2 e^{-2x}.$

17. $u(x,t) = \begin{cases} 0, \quad x \geq t, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{t-x} - \frac{1}{2}\left[\sin(x-t) + \cos(x-t)\right], \quad x < t. \end{cases}$

18. $u(x,t) = \begin{cases} 1 - x + 2t^2, \quad x \geq t, \\ 2t^2 - t - \frac{1}{2}(x-t)^2 + e^{t-x}, \quad x < t. \end{cases}$

19. $u(x,t) = x^2 + t^2.$

20. $u(x,t) = x^2 - 2t^2.$

21. $u(x,t) = \begin{cases} 1 - x + 2t^2, \quad x \geq t, \\ 2t^2 - t - \frac{1}{2}(x-t)^2 + e^{t-x}, \quad x < t. \end{cases}$

22. $u(x,t) = \dfrac{x}{2a\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^t \dfrac{g(t-\tau)}{\sqrt{\tau^3}} e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}} d\tau.$

23. $u(x,t) = -\dfrac{a}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^t \dfrac{g(t-\tau)}{\sqrt{\tau}} e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}} d\tau.$

24. $u(x,t) = \begin{cases} e^{-x-t} + e^{-x+t}, \ 0 < t \leq x; \\ e^{-x-t} + 3e^{2(x-t)} + (1-x+t)\,e^{3(x-t)} - 3e^{(x-t)}, \ 0 < x < t. \end{cases}$

25. $u(x,t) = \dfrac{1}{2}\left((x+t)^2 - (x+t)^3 + (x-t)^2 - |x-t|^3\right) + \sin t \cos x.$

7.2.11. 11 - өзіндік жұмыс. Штурм-Лиувилль есебі

1. $\lambda_k = \frac{\pi k}{l}$, $X_k(x) = \sin\frac{\pi k}{l}x$, $\|X_k(x)\|^2 = \frac{l}{2}$, $k = 1,2,\ldots$; **2.** $\lambda_k = \frac{(2k+1)\pi}{2l}$, $X_k(x) = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2l}x$, $\|X_k(x)\|^2 = \frac{l}{2}$, $k = 0,1,2,\ldots$; **3.** $\lambda_k = \frac{(2k+1)\pi}{2l}$, $X_k(x) = \sin\frac{(2k+1)\pi}{2l}x$, $\|X_k(x)\|^2 = \frac{l}{2}$, $k = 0,1,2,\ldots$; **4.** $\lambda_k = \frac{\pi k}{l}$, $X_k(x) = \cos\frac{\pi k}{l}x$, $k = 1,2,\ldots, \|X_0(x)\|^2 = l$, $\|X_k(x)\|^2 = \frac{l}{2}$, $k = 1,2,\ldots$; **5.** $X_k(x) = \sin\lambda_k x$, $\|X_k(x)\|^2 = \frac{l\left(h^2+\lambda_k^2\right)+h}{2\left(h^2+\lambda_k^2\right)}$ мұндағы λ_k : $h \cdot tg\lambda l = -\lambda$ теңдеуінің оң түбірі. **6.** $X_k(x) = \lambda_k\cos\lambda_k x + h\sin\lambda_k x$, $\|X_k(x)\|^2 = \frac{l\left(h^2+\lambda_k^2\right)+h}{2}$ мұндағы λ_k : $hctg\lambda l = -\lambda$ теңдеуінің оң түбірі. **7.** $X_k(x) = \lambda_k\cos\lambda_k x + h\sin\lambda_k x$, $\|X_k(x)\|^2 = \frac{l\left(h^2+\lambda_k^2\right)+2h}{2}$, мұндағы λ_k : $tg\lambda l = \frac{2h\lambda}{\lambda^2-h^2}$ теңдеуінің оң түбірі. **8.** $\lambda_k = k$, $X_k(x) = \sin kx$, $\|X_k(x)\|^2 = \frac{\pi}{2}$, $k = 1,2,\ldots$; **9.** $\lambda_0 = 0$, $X_0(x) = 1$, $\|X_0(x)\|^2 = \pi$, $\lambda_k = k$, $X_k(x) = \cos kx$, $\|X_k(x)\|^2 = \frac{\pi}{2}$, $k = 1,2,3,\ldots$; **10.** $\lambda_k = \frac{(2k+1)}{2}$, $X_k(x) = \sin\frac{(2k+1)x}{2}$, $\|X_k(x)\|^2 = \frac{\pi}{2}$, $k = 0,1,2,\ldots$; **11.** $\lambda_k = \frac{(2k+1)}{2}$, $X_k(x) = \cos\frac{(2k+1)x}{2}$, $\|X_k(x)\|^2 = \frac{\pi}{2}$, $k = 0,1,2,\ldots$; **12.** $\lambda_0 = 0$, $X_0(x) = 1$, $\|X_0(x)\|^2 = 2\pi$, $\lambda_k = k$, $X_{1k} = \cos kx$, $X_{2k} = \sin kx$, $\|X_k(x)\|^2 = \pi$, $k = 1,2,3,\ldots$; **13.** $\lambda_k = \frac{2\pi k}{l}$, $X_k = \sin\frac{2\pi k}{l}x$, $\|X_k(x)\|^2 = \frac{l}{2}$, $k = 1,2,3,\ldots$; **14.** $\lambda_k = \frac{\pi k}{l}$, $X_k = \cos\frac{\pi k}{l}x$, $\|X_k(x)\|^2 = \frac{l}{2}$, $k = 1,2,3,\ldots$; **15.** $\lambda_k =$

$\frac{2\pi k}{l}$, $X_k = \sin\frac{2\pi k}{l}x$, $\|X_k(x)\|^2 = \frac{l}{2}$, $k = 1,2,3,\ldots$; **16.** $\lambda_k = \frac{\pi k}{l}$, $X_k = \cos\frac{\pi k}{l}x$, $\|X_k(x)\|^2 = \frac{l}{2}$, $k = 1,2,3,\ldots$; **17.** $\lambda_0 = 0$, $X_0(x) = 1$, $\|X_0(x)\|^2 = 2$, $\lambda_k = \pi k$, $X_{1k} = \cos\pi kx$, $X_{2k} = \sin\pi kx$, $\|X_k(x)\|^2 = 1$, $k = 1,2,3,\ldots$; **18.** $\lambda_0 = 0$, $X_0(x) = 1$, $\|X_0(x)\|^2 = 4$, $\lambda_k = \frac{\pi k}{2}$, $X_{1k} = \cos\frac{\pi k}{2}x$, $X_{2k} = \sin\frac{\pi k}{2}x$, $\|X_k(x)\|^2 = 2$, $k = 1,2,3,\ldots$; **19.** $\lambda_0 = 0$, $X_0(x) = 1$, $\|X_0(x)\|^2 = 5$, $\lambda_k = \frac{\pi k}{5}$, $X_k(x) = \cos\frac{\pi k}{5}x$, $\|X_k(x)\|^2 = \frac{5}{2}$, $k = 1,2,3,\ldots$; **20.** $\lambda_k = \pi k$, $X_k(x) = e^x\sin\pi kx$, $\|X_k(x)\|^2 = \frac{e^2-1}{4}$, $k = 1,2,3,\ldots$; **21.** $X_k(x) = \sin\lambda_k(l-x)$, $\|X_k(x)\|^2 = \frac{l\left(h^2+\lambda_k^2\right)+h}{2\left(h^2+\lambda_k^2\right)}$, мұндағы $\lambda_k \geq 0$: $htg\lambda l = -\lambda$ теңдеуінің оң түбірі; **22.** $\lambda_k = k$, $X_k(x) = e^{-4x}\sin kx$, $\|X_k(x)\|^2 = \frac{e^{8\pi}-1}{16e^{8\pi}}$, $k = 1,2,3,\ldots$; **23.** $\lambda_k = \frac{\pi k}{2}$, $X_k(x) = \sin\frac{\pi k}{2}x$, $\|X_k(x)\|^2 = 1$, $k = 1,2,\ldots$; **24.** $\lambda_k = \frac{(2k+1)\pi}{6}$, $X_k(x) = \cos\frac{(2k+1)\pi}{6}x$, $\|X_k(x)\|^2 = \frac{3}{2}$, $k = 0,1,2,\ldots$; **25.** $\lambda_k = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, $X_k(x) = \sin\frac{(2k+1)\pi}{2}x$, $\|X_k(x)\|^2 = \frac{1}{2}$, $k = 0,1,2,\ldots$.

7.2.12. 12 - өзіндік жұмыс. Біртекті толқындық теңдеу үшін бастапқы–шеттік есеп

1. $u(x,t) = \dfrac{4}{3\pi^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}\sin 3(2n-1)\pi t\sin(2n-1)\pi x.$

2. $u(x,t) = \dfrac{8}{\pi^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\cos 3(2n-1)\pi t\sin(2n-1)\pi x.$

3. $u(x,t) = -\dfrac{4}{\pi^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+(-1)^n2)}{n^3}\cos n\sqrt{7}\pi t\sin\pi x.$

4. $u(x,t) = \dfrac{8}{3\pi^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}\cos 3(2n-1)\pi t\sin(2n-1)\pi x.$

5. $u(x,t) = -\dfrac{4}{\sqrt{7}\pi^4}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+(-1)^n2)}{n^4}\sin n\sqrt{7}\pi t\sin\pi x.$

6. $u(x,t) = \dfrac{96}{\pi^5}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^5}\cos 2(2n-1)\pi t\sin(2n-1)\pi x.$

7. $u(x,t) = \dfrac{243}{2\pi^4}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}\sin\frac{8n\pi t}{3}\sin\frac{n\pi x}{3}.$

8. $u(x,t) = -\dfrac{128}{\pi^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^3}\cos\frac{3(2n-1)\pi t}{4}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{4}.$

9. $u(x,t) = 4-\dfrac{768}{\pi^4}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}\cos\frac{\sqrt{5}(2n-1)\pi t}{2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}.$

10. $u(x,t) = 4t - \dfrac{1536}{\sqrt{5}\pi^5} \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^5} \sin \dfrac{\sqrt{5}(2n-1)\pi t}{2} \cos \dfrac{(2n-1)\pi x}{2}.$

11. $u(x,t) = -\dfrac{2\pi^4}{5} - 48 \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1+(-1)^n 2}{n^4} \cos 2nt \cos nx.$

12. $u(x,t) = -\dfrac{7}{5} - \dfrac{144}{\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^4} \cos n\sqrt{7}\pi t \cos n\pi x.$

13. $u(x,t) = -\dfrac{2\pi^4 t}{5} - 24 \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1+(-1)^n}{n^5} \sin 2nt \cos n\pi x.$

14. $u(x,t) = -\dfrac{7t}{5} - \dfrac{144}{\pi^5} \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^5} \sin n\sqrt{7}\pi t \cos n\pi x.$

15. $u(x,t) = \dfrac{\pi^4}{30} - 3 \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^4} \cos 8nt \cos 2nx.$

16. $u(x,t) = \dfrac{3}{5} - \dfrac{48}{\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{2+(-1)^n 2}{n^4} \cos nnt \cos nx.$

17. $u(x,t) = \dfrac{\pi^4 t}{30} - \dfrac{3}{8} \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^5} \sin 8t \cos 2nx.$

18. $u(x,t) = t + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)x \cos(2n+1)at$

19. $u(x,t) = \dfrac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2} \cos \dfrac{\pi(2n+1)}{4} t \cos \dfrac{\pi(2n+1)}{4} x.$

20. $u(x,t) = \dfrac{1}{7a} \sin 7x \sin at.$

21. $u(x,t) = \dfrac{1}{2\pi a} \sin \dfrac{2\pi at}{l} \sin \dfrac{2\pi x}{l}.$

22. $u(x,t) = t + \dfrac{l}{2} - \dfrac{4l}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2k+1)^2} \cos \dfrac{2k+1}{l} a\pi t \cos \dfrac{2k+1}{l} \pi x.$

23. $u(x,t) = \dfrac{2l}{a\pi} \sin \dfrac{a\pi t}{2l} \sin \dfrac{\pi x}{2l} + \cos \dfrac{5a\pi t}{2l} \sin \frac{5\pi x}{2l}.$

24. $u(x,t) = \dfrac{2l}{a\pi} \sin \dfrac{a\pi t}{2l} \sin \dfrac{\pi x}{2l} + d\frac{2l}{3a\pi} \sin \dfrac{3a\pi t}{2l} \sin \dfrac{3\pi x}{2l} +$
$\dfrac{8l}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \cos \dfrac{2k+1}{2l} a\pi t \sin \dfrac{2k+1}{2l} \pi x.$

25. $u(x,t)=\cos\dfrac{a\pi t}{2l}\cos\dfrac{\pi x}{2l}+\dfrac{2l}{3a\pi}\sin\dfrac{3a\pi t}{2l}\cos\dfrac{3\pi x}{2l}+\dfrac{2l}{5a\pi}\sin\dfrac{5a\pi t}{2l}\cos\frac{5\pi x}{2l}.$

7.2.13. 13 - өзіндік жұмыс. Біртекті емес толқындық теңдеуі үшін бастапқы–шеттік есеп

1. $u\left(x,t\right)=bx\left(l-x\right)+\frac{4bl^2}{\pi^3}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^k-1}{k^3}\cos\dfrac{k\pi t}{l}\sin\dfrac{k\pi x}{l}.$

2. $u\left(x,t\right)=\dfrac{2}{\pi}t\sin t\sin x+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\left(\cos t-\cos\left(2k+1\right)t\right)}{\pi\left(2k+1\right)k\left(k+1\right)}\sin\left(2k+1\right)x.$

3. $u\left(x,t\right)=2\cos\dfrac{a\pi t}{l}\cdot\sin\dfrac{\pi x}{l}+$
$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{aAl^3\left(-1\right)^{k+1}}{k\pi\left(l^2+\left(ak\pi\right)^2\right)}\left(e^{-t}-\cos\dfrac{k\pi at}{l}+\dfrac{l}{k\pi a}\sin\dfrac{k\pi at}{l}\right)\sin\dfrac{k\pi x}{l}.$

4. $u\left(x,t\right)=\dfrac{4A}{4+a^2}\left(e^{-t}-\cos\dfrac{at}{2}+\dfrac{2}{a}\sin\dfrac{at}{2}\right)\cos\dfrac{x}{2}+$
$\dfrac{4}{a}\sin\dfrac{at}{2}\cos\dfrac{x}{2}-\dfrac{4}{5a}\sin\dfrac{5at}{2}\cos\dfrac{5x}{2}.$

5. $u\left(x,t\right)=\dfrac{400}{\pi^3}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^k-1}{k^3}\cos\dfrac{k\pi t}{2}\sin\dfrac{k\pi x}{10}+$
$\dfrac{28}{9\pi^2-4}\left(\sin t-\dfrac{2}{3\pi}\sin\dfrac{3\pi t}{2}\right)\sin\dfrac{3\pi x}{10}.$

6. $u\left(x,t\right)=xt^2+2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\lambda_n^{-6}\left(e^{-\lambda_n^2 t}+\lambda_n^2 t-1\right)\cos\lambda_n x,\qquad \lambda_n=\dfrac{\pi}{2}+\pi n.$

7. $u(x,t)=\dfrac{b}{a^2}\left(\dfrac{x}{l}shl-shx\right)+\dfrac{2b}{a^2\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^k}{k}\cos\dfrac{k\pi at}{l}\cdot\sin\dfrac{k\pi x}{l}-$
$\dfrac{2b\pi}{a^2}shl\cdot\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^k k}{k^2\pi^2+l^2}\cdot\cos\dfrac{k\pi at}{l}\sin\dfrac{k\pi x}{l}.$

8. $u(x,t)=-\dfrac{8l^4t^2}{\pi^5}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{2k+1}{l}\pi x}{\left(2k+1\right)^5}+\dfrac{16l^6}{\pi^7}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{2k+1}{l}\pi x}{\left(2k+1\right)^7}-$
$\dfrac{16l^6}{\pi^7}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{2k+1}{l}\pi x\cos\frac{2k+1}{l}\pi t}{\left(2k+1\right)^7}.$

9. $u(x,t)=\left(1-\dfrac{x}{\pi}\right)t^2+\dfrac{x}{\pi}t^3+\sin x\cos t+$
$\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^3}\left[\left(-1\right)^k 3t-1+\cos kt-\dfrac{\left(-1\right)^k}{k}3\sin kt\right]\sin kx.$

10. $u(x,t) = x + t + \cos\frac{t}{2}\sin\frac{x}{2} - \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\,t}{2}\sin\frac{(2k+1)\,x}{2}.$

11. $u(x,t) = \frac{xt}{l} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\,2l}{(k\pi)^2}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k\pi t}{l}.$

12. $u(x,t) = t + 1 + x\left(t^3 - t + 1\right) +$
$\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{2}{(k\pi)^2}\left[\frac{6\,(-1)^{k+1}}{(\pi k)^2} - 1\right]\sin\pi kt + \frac{(-1)^k\,12t}{\pi^3k^3}\right\}\cdot\sin\pi kx.$

13. $u(x,t) = sh^2 t - t^2\cos 2x.$

14. $u(x,t) = \cos\frac{x}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^4}\left(\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)t - 1\right)\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x.$

15. $u(x,t) = \left(\frac{1}{2} - t\cos 2t\right)\sin x + \frac{1}{2\sqrt{3}}\sin\left|2\sqrt{3}t\right|\sin 3x.$

16. $u(x,t) = 2tx + \left(2e^t - e^{-t} - 3te^{-t}\right)\cos x.$

17. $u(x,t) = t\,(1-x) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\pi k)^3}\left[e^{-\frac{t}{2}}\left(2\cos\mu_k t + \frac{\sin\mu_k t}{\mu_k}\right) - 2\right]\sin\pi kx,$

$\mu_k = \sqrt{(\pi k)^2 - \frac{1}{4}}.$

18. $u(x,t) = 3 + \left(t + t^2\right)x + \left(8 + 4t - 8e^t + 5te^t\right)\sin x.$

19. $u(x,t) = \frac{1}{\pi}tx + \frac{1}{3\pi}t^3\sin x + \frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k\mu_k^2}\left(\frac{1}{\mu_k}\sin\mu_k t - t\right)\sin kx,$

$\mu_k = \sqrt{k^2 - 1}.$

20. $u(x,t) = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)t^2 + \frac{x}{\pi}t^3 + \sin t\sin x +$
$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\cos nt - 1 + \frac{3}{n}(-1)^{n+1}\sin nt + 3\,(-1)^n\,t\right\}\frac{\sin nx}{n^3}.$

21. $u(x,t) = \frac{1}{5}\left(e^{-t} - \cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t\right).$

22. $u\,(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{1}{1+(\pi na)^2}\left(e^{-t} - \cos\pi nat + \frac{\sin\pi nat}{\pi na}\right)\sin\pi nx.$

23. $u\,(x,t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{5}{2}t\sin\frac{5}{2}x.$

24. $u\,(x,t) = \frac{xt}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 6}{(\pi n)^2}\sin\frac{\pi nx}{3}\sin\frac{\pi nt}{3}.$

25. $u(x,t) = t + 1 + x\left(t^3 - t + 1\right) +$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{12(-1)^n t}{(\pi n)^2} + \frac{2}{(\pi n)^2}\left[\frac{6(-1)^{n+1}}{\pi n} - 1\right]\sin(\pi n t)\right\}\sin(\pi n x).$$

7.2.14. 14 - өзіндік жұмыс. Біртекті жылуөткізгіштік теңдеу үшін бастапқы–шеттік есеп

1. $u(x,t) = \frac{8Al}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}e^{-\left(\frac{(2k+1)a\pi}{2!}\right)^2 t}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2l}$

2. $u(x,t) = \frac{Bl}{2} + \frac{2Bl}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k - 1}{k^2}e^{-\left(\frac{ka\pi}{l}\right)^2 t}\cos\frac{k\pi x}{l}.$

3. $u(x,t) = e^{-49t}\sin\frac{7x}{2}$

4. $u(x,t) = \frac{8}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}e^{-(2n-1)^2\pi^2 t}\sin(2n-1)\pi x$

5. $u(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}e^{-9(2n-1)^2\pi^2 t/16}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{4}.$

6. $u(x,t) = \frac{\pi}{2}e^{-3t}\sin x - \frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(4n^2-1)}e^{-12n^2 t}\sin 2nx$

7. $u(x,t) = -\frac{32}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+(-1)^n 2)}{n^3}e^{-9n^2\pi^2 t/4}\sin\frac{n\pi x}{2}$

8. $u(x,t) = -\frac{324}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}e^{-4n^2\pi^2 t/9}\sin\frac{n\pi x}{3}$

9. $u(x,t) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}e^{-(2n-1)^2\pi^2 t}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}$

10. $u(x,t) = -\frac{720}{\pi^5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^5}e^{-7n^2\pi^2 t}\sin n\pi x$

11. $u(x,t) = \frac{96}{\pi^5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^5}e^{-5(2n-1)^2\pi^2 t}\sin(2n-1)\pi x$

12. $u(x,t) = -\frac{240}{\pi^5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n 2}{(n)^5}e^{-2n^2\pi^2 t}\sin n\pi x$

13. $u(x,t) = \frac{16}{3} + \frac{64}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\pi^2}e^{-9n^2\pi^2 t/16}\cos\frac{n\pi x}{4}$

14. $u(x,t) = -\frac{8}{3} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}e^{-n^2\pi^2 t}\cos\frac{n\pi x}{2}$

15. $u(x,t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}e^{-36n^2\pi^2}\cos 2n\pi x$

16. $u(x,t) = 4 - \frac{384}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}e^{-3(2n-1)^2\pi^2 t/4}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}$

17. $u(x,t) = -\frac{28}{5} - \frac{576}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}e^{-5n^2\pi^2 t/2}\cos\frac{n\pi x}{\sqrt{2}}$

18. $u(x,t) = -\frac{2}{5} - \frac{48}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n 2}{n^4}e^{-3n^2\pi^2 t}\cos n\pi x$

19. $u(x,t) = \frac{3}{5} - \frac{48}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{n^4}e^{-n^2\pi^2 t}\cos n\pi x$

20. $u(x,t) = \frac{\pi^4}{30} - 3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^4}e^{-4n^2 t}\cos 2nx$

21. $u(x,t) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n-3)}e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}$

22. $u = 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}\left[(-1)^n + \frac{4}{(2n-1)\pi}\right]e^{-3(2n-1)^2 t/4}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}.$

23. $u(x,t) = \frac{128}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}e^{-5(2n-1)^2 t/16}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{4}$

24. $u = -\frac{96}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\left[1+(-1)^n\frac{4}{(2n-1)\pi}\right]e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4}sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}.$

25. $u = \frac{96}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\left[1+(-1)^n\frac{2}{(2n-1)\pi}\right]e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4}sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}.$

7.2.15. 15 - өзіндік жұмыс. Біртекті емес жылуөткізгіштік теңдеу үшін бастапқы–шеттік есеп

1. $u(x,t) = 1 - x + x^3 + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-9\pi^2(2n-1)^2 t/16}}{(2n-1)}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{4}.$

2. $u(x,t) = 1 + x + x^2 - \frac{8}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-(2n-1)^2\pi^2 t}}{(2n-1)^3}\sin(2n-1)\pi x.$

3. $u(x,t) = -1 - x + x^3 + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} e^{-\frac{3(2n-1)^2\pi^2 t}{4}} \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}.$

4. $u = x^2 - x - 2 - \frac{64}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)}\left[1 - \frac{8}{(2n-1)^2\pi^2}\right] e^{-\frac{9(2n-1)^2\pi^2 t}{64}} \cos\frac{(2n-1)\pi x}{8}$

5. $u(x,t) = \sin\pi x + \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n-3)} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4} \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}.$

6. $u(x,t) = x^3 - x + 3 + \frac{32}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4}}{(2n-1)^3} \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2.}$

7. $u(x,t) = x^2 + x - 1 + \frac{12}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} e^{n^2\pi^2 t} \sin n\pi x.$

8. $u = x(t+2) + 3e^{-9t}\sin\frac{3x}{2} + \frac{24}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\left(e^t - e^{-(2k+11)^2 t}\right)}{(2k+1)^2\left[(2k+1)^2+1\right]} \sin\frac{2k+1}{2}x.$

9. $u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{98}{\pi^3(2k+1)^3}\left[1 - e^{-\left(\frac{2(2k+1)\pi}{7}1\right)^2 t}\right] \cos\frac{(2k+1)\pi x}{2l}.$

10. $u = e^{-\left(\frac{a^2\pi^2}{4l^2} + \frac{\beta}{a^2}\right)t} \sin\frac{\pi x}{2l}.$

11. $u = qx + \frac{(A-q)l}{2} - \frac{4l(A-q)}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(2k+1)^2 a^2\pi^2}{l^2}t}}{(2k+1)^2} \cos\frac{(2k+1)\pi x}{l}.$

12. $u = \frac{1}{\beta + \left(\frac{a\pi}{l}\right)^2} \cdot \left[1 - \exp\left[-\left(\beta + \frac{a^2\pi^2}{l^2}\right)t\right]\right] \cdot \sin\frac{\pi x}{l}$

13. $u = t\cos x + \frac{1}{8}\left(e^{-8t} - 1\right)\cos 3x$

14. $u = xt + \sin\pi x e^{x-t-\pi^2 t}$

15. $u = x + t\sin x + \frac{1}{8}\left(1 - e^{-8t}\right)\sin 3x$

16. $u = tx^2 + \frac{1}{4}\left(e^{4t} - 1\right) + t\cos 2x$

17. $u = t + 1 + \left(1 - e^{-t}\right)e^x \sin x + e^{x-4t}\sin 2x$

18. $u = xt^2 + e^t + \sin t - \cos t + e^{-3t}\cos 2x$

19. $u = x^2 + 2e^{9t} + (2t - \sin 2t)\cos 3x$

20. $u = x + t^2 + \frac{1}{5}\left(e^{5t} - 1\right)\cos x + \frac{1}{3}\left(1 - e^{-3t}\right)\cos 3x$

21. $u = e^{-2t}\sin x + \frac{2}{\pi}e^{-t}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\dfrac{1-e^{-(4m+1)t}}{(2m+1)(4m+1)^2} \cdot \sin(4m+1)x + \dfrac{2}{\pi}e^{-t}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\dfrac{1-e^{-(4m+3)t}}{(2m+1)(4m+3)^2}\sin(4m+3)x$

22. $u(t,x) = \frac{1}{4}\left(e^{4t}-1\right) + t\cos 2x.$

23. $u = \frac{4}{\pi}e^{-t}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^4}\left(e^{-(2k+1)^2t}-1\right)\cos(2k+1)x$

24. $u(t,x) = e^t + \sin t - \cos t + e^{-3t}\cos 2x$

25. $u = \frac{2}{\pi}\left(e^{-t}-1\right) + \cos x - \frac{4}{\pi}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{1-e^{-\left(4m^2-1\right)t}}{\left(4m^2-1\right)^2}\cdot\cos 2mx$

7.2.16. 16 - өзіндік жұмыс. Эллипстік типті теңдеулер. Гармоникалық функциялар

1. $v(x,y) = \frac{1}{4}(x^4+y^4-6x^2y^2)+C;$

2. $u(r) = \dfrac{bB-aA}{ah} + bB\ln\frac{r}{a};$

3. $u(x,y) = x^3y - xy^3 + C_1y + C_2;$

4. $u(x,y) = e^x\sin y + C_1x + C_2;$

5. $u(x,y,z) = ye^x\cos z - y^2 + x^2 + g(x,y)$, мұндағы $g(x,y)$ кез келген гармоникалық функция;

6. $u(a) = P - bT\ln\frac{c}{a};$

7. $u(a) = T - cP\ln\frac{b}{a};$

8. $f(z) = \sin xchy + i(\cos xshy + C);$

9. $v(x,y) = e^y\cos x + C;$

10. $u(a) = \dfrac{P\ln\frac{a}{d} - T\ln\frac{a}{c}}{\ln\frac{c}{d}}, \quad u(b) = \dfrac{P\ln\frac{b}{d} - T\ln\frac{b}{c}}{\ln\frac{c}{d}};$

11. $u(a) = P + \dfrac{b(c-a)}{a(c-b)}(T-P);$

12. $v(x,y) = x^3y - xy^3 + C;$

13. $u(r) = A + (B-A)\dfrac{\ln\frac{r}{a}}{\ln\frac{b}{a}};$

14. $v(x,y) = -chx\sin y + C_1y + C_2;$

15. $u(r) = B + aA\ln\frac{r}{b}$;

16. $v(x,y) = xy - \frac{1}{2}(x^2 - y^2) - C_1x + C_2$;

17. $u(r) = B + \dfrac{a(A+hB)\ln\frac{r}{b}}{1 + ah\ln\frac{b}{a}}$;

18. $v(x,y) = \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{2}x^2y - x + C_1y + C_2$;

19. $u(b) = \dfrac{P\left(1 + bh\ln\frac{b}{a}\right) - bT\ln\frac{c}{a}}{1 + bh\ln\frac{b}{c}}$;

20. $u(b) = \dfrac{P\ln\frac{b}{a} - T\ln\frac{b}{c}}{\ln\frac{c}{a}}$;

21. $f\left(z\right) = 2\sin z - z$;

22. $u(a) = P + \dfrac{b^2(a-c)(T-hP)}{a(c - bch - b^2h)}$;

23. $u(a) = P + \dfrac{d^2(a-c)T}{ac}, \;\; u(b) = P + \dfrac{d^2(b-c)T}{bc}$;

24. $u(a) = P + \dfrac{b^2(a-c)T}{ac}$;

25. $u(a) = P + \dfrac{c^2(a-b)T}{ab}$;

7.2.17. 17 - өзіндік жұмыс. Лаплас және Пуассон теңдеулері үшін Фурье әдісі

1. $u\left(x,y\right) = A + \frac{A(b-2)x}{2a} - \frac{4Ab}{\pi^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{\left(2k+1\right)^2}\dfrac{sh\frac{(2k+1)\pi x}{b}}{sh\frac{(2k+1)\pi a}{b}}\cos\dfrac{\left(2k+1\right)\pi y}{b}$.

2. $u\left(x,y\right) = \frac{Ash\frac{\pi(a-x)}{b}}{sh\frac{\pi a}{b}}\sin\frac{\pi y}{b} + \frac{Bsh\frac{\pi(b-y)}{a}}{sh\frac{\pi b}{a}}\sin\frac{\pi x}{a}$.

3. $u\left(x,y\right) = x\left(a-x\right) - \frac{8a^2}{\pi^3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{sh\frac{(2k+1)\pi y}{a} - sh\frac{(2k+1)\pi(y-b)}{a}}{sh\frac{(2k+1)\pi b}{a}}\sin\dfrac{\left(2k+1\right)\pi x}{a}$.

4. $u = \frac{2}{b}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^k}{\lambda_k^6}\left(\dfrac{\left(\lambda_k^2a^2+2\right)sh\lambda_kx - 2sh\lambda_k\left(x-a\right)}{sh\lambda_ka} - \lambda_k^2x^2 - 2\right)\sin\lambda_ky$,
$\lambda_k = \dfrac{\left(2k+1\right)\pi}{2b}$.

5. $u = \frac{12a^3}{\pi^3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sinh n\pi\left(b-y\right)/a}{n^3\sinh n\pi b/a}\sin\dfrac{n\pi x}{a}$.

6. $u=\frac{sh\frac{5\pi y}{2a}}{sh\frac{5\pi b}{2a}}\sin\frac{5\pi x}{2a}.$

7. $u=\frac{sh\frac{3\pi x}{2b}}{sh\frac{3\pi a}{2b}}\cos\frac{3\pi y}{2b}+\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\frac{sh\frac{\pi}{b}\left(\frac{n+1}{2}\right)(a-x)}{sh\frac{\pi}{b}\left(\frac{n+1}{2}\right)a}\cos\frac{\pi}{b}\left(\frac{n+1}{2}\right)y.$

8. $u=y+const.$

9. $u(x,y)=\frac{8}{\pi^3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh(2n-1)\pi(1-y)}{(2n-1)^3\sinh(2n-1)\pi}\sin(2n-1)\pi x.$

10. $u(x,y)=-\frac{32}{\pi^3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{(1+(-1)^n2)\sinh n\pi(3-y)}{2}}{\frac{n^3\sinh 3n\pi}{2}}\sin\frac{n\pi x}{2}.$

11. $u(x,y)=\frac{8}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sinh(2n-1)\pi\left(\frac{1-y}{2}\right)}{(2n-1)^2\sinh(2n-1)\pi}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}.$

12. $u(x,y)=\frac{\pi}{2}\frac{sh(1-y)}{sh1}\sin x-\frac{16}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nsh2n(1-y)}{(4n^2-1)^2sh2n}\sin 2nx.$

13. $u(x,y)=3y+\frac{108}{\pi^3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\frac{\sinh n\pi y}{3}}{\frac{n^3\cosh 2n\pi}{3}}\cos\frac{n\pi x}{3}.$

14. $u(x,y)=\frac{y}{2}+\frac{4}{\pi^3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh(2n-1)\pi y}{(2n-1)^3\cosh 2(2n-1)\pi}\cos(2n-1)\pi x.$

15. $u(x,y)=-\frac{8y}{3}+\frac{32}{\pi^3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\frac{\sinh n\pi y}{2}}{n^3\cosh n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}.$

16. $u(x,y)=\frac{y}{3}+\frac{4}{\pi^3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh n\pi y}{n^3\cosh n\pi}\cos n\pi x.$

17. $u=\frac{96}{\pi^3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[3+(-1)^n\frac{4}{(2n-1)\pi}\right]\frac{\cosh\frac{(2n-1)\pi(x-3)}{2}}{(2n-1)^3\cosh\frac{3(2n-1)\pi}{2}}\sin\frac{(2n-1)\pi y}{2}$

18. $u(x,y)=-\frac{16}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cosh\frac{(2n-1)x}{2}}{(2n-3)(2n+1)(2n-1)\sinh\frac{(2n-1)}{2}}\cos\frac{(2n-1)y}{2}.$

19. $u(x,y)=-\frac{432}{\pi^3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{4(-1)^n}{(2n-1)\pi}\right]\frac{\cosh\frac{(2n-1)\pi x}{6}}{(2n-1)^3\sinh\frac{(2n-1)\pi}{3}}\cos\frac{(2n-1)\pi y}{6}.$

20. $u(x,y)=-\frac{64}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cosh\frac{(2n-1)x}{2}}{(2n-1)^4\sinh\frac{(2n-1)}{2}}\cos\frac{(2n-1)y}{2}.$

21. $u\left(x,y\right)=\frac{72}{\pi^{3}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sinh\frac{(2n-1)\pi y}{3}}{\left(2n-1\right)^{3}\sinh\frac{2(2n-1)\pi}{3}}\sin\dfrac{\left(2n-1\right)\pi x}{3}.$

22. $u\left(x,y\right)=\frac{8(1-y)}{15}-\frac{48}{\pi^{4}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{4}}\dfrac{\sinh n\pi\left(1-y\right)}{\sinh n\pi}\cos n\pi x.$

23. $u\left(x,y\right)=-12\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\dfrac{\cosh n\left(y-2\right)}{n^{3}\cosh 2n}\sin nx.$

24. $u\left(x,y\right)=\frac{\pi^{4}}{30}-3\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{4}}\dfrac{\cosh 2ny}{\cos 2n}\cos 2nx.$

25. $u\left(x,y\right)=-\frac{128}{\pi^{3}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\dfrac{\cosh\frac{(2n-1)\pi x}{4}}{\left(2n-1\right)^{3}\cosh\frac{(2n-1)\pi}{2}}\cos\dfrac{\left(2n-1\right)\pi y}{4}.$

7.2.18. 18 - өзіндік жұмыс. Лаплас теңдеуі үшін шеңбер ішінде қойылған Дирихле және Нейман есебі

1. $u(r,\varphi)=\dfrac{4\pi^{3}}{3}+2\pi+4\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{r}{3}\right)^{k}\left(\dfrac{1}{k^{2}}\cos k\varphi-\dfrac{\pi+1}{k}\sin k\varphi\right).$

2. $u(r,\varphi)=\frac{T}{h}+\frac{p}{1+Rh}\sin\varphi+\frac{q}{R^{2}(3+Rh)}\cos 3\varphi$

3. $u\left(x,y\right)=x+xy.$

4. $u\left(x,y\right)=x^{2}-y^{2}+2y+R^{2}.$

5. $u\left(x,y\right)=\frac{R^{2}}{2}-x+\frac{3}{2}(x^{2}-y^{2}).$

6. $u\left(x,y\right)=3R^{2}y-3x^{2}y+y^{3}.$

7. $u\left(x,y\right)=\frac{1}{2}\left(3x^{2}-3y^{2}-R^{2}\right).$

8. $u\left(x,y\right)=R^{2}x-x^{3}+3xy^{2}.$

9. $u\left(x,y\right)=\frac{R}{2}+\frac{1}{2R}\left(y^{2}-x^{2}\right)+Rxy.$

10. $u\left(x,y\right)=R^{2}+\left(x+y\right)\left(x-y-1\right).$

11. $u\left(x,y\right)=const$ егер $a=0$, егер $a\neq 0$ есеп дұрыс қойылмаған.

12. $u\left(x,y\right)=\frac{R^{2}}{2}\left(x^{2}-y^{2}\right)+const$ егер $a\neq -R^{2}$, егер $a\neq -R^{2}$ есеп дұрыс қойылмаған.

13. $u\left(x,y\right)=Rxy+const.$

14. $u\left(x,y\right)=-\frac{aR}{4}\left(x^{2}-y^{2}\right)+const$ егер $b=\frac{aR^{2}}{2}$, егер $b\neq\frac{aR^{2}}{2}$ есеп дұрыс қойылмаған.

15. $u(x,y) = \frac{aR}{2}\left(x^2 - y^2\right) + Ry + const$ егер $b = a$, егер $b \neq a$ есеп дұрыс қойылмаған.

16. $u(r,\varphi) = a\frac{r}{\varphi}\sin\varphi$.

17. $u(r,\varphi) = b + 3a\frac{r}{R}\sin\varphi - 4a\left(\frac{r}{R}\right)^3\sin 3\varphi$.

18. $u(r,\varphi) = a\frac{r}{R}\sin\varphi - \frac{8a}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{2k}\frac{\cos 2k\varphi}{4k^2-9}$.

19. $1 + 3\frac{r}{R}\cos\varphi - \left(\frac{r}{R}\right)^2\cos 2\phi + \left(\frac{r}{R}\right)^3\cos 3\varphi$;

20. $3r\sin\varphi - \frac{R}{3}\left(\frac{r}{R}\right)^3\sin 3\varphi + const$;

21. $\frac{a}{2R}r^2\cos 2\varphi + const$;

22. $20 + 12\left(\frac{r}{R}\right)^4\cos 4\varphi$;

23. $\frac{r}{R+1}\sin\varphi + \frac{1}{R^3}\frac{r^4}{R+4}\cos 4\varphi$.

24. $u(r,\varphi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}r^2\cos(2\varphi)$.

25. $u(r,\varphi) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}r^2\cos(2\varphi) + \frac{1}{8}r^4\cos(4\varphi)$.

7.2.19. 19 - өзіндік жұмыс. Лаплас теңдеуі үшін шеңбер сыртында қойылған Дирихле және Нейман есебі

1. $u(x,y) = \left(\frac{R}{r}\right)^2 y + 2\left(\frac{R}{r}\right)^4 xy$;

2. $u(x,y) = \left(\frac{R}{r}\right)^4\left(x^2 - y^2\right)$;

3. $u(x,y) = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^4\left(x^2 - y^2\right) + \frac{R^2}{2} + 1$.

4. $u(x,y) = \frac{R^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^4\left(x^2 - y^2 + 2xy\right)$.

5. $u(x,y) = \frac{R^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^4\left(x^2 - y^2\right) + \left(\frac{R}{r}\right)^2(x+y)$;

6. $u(x,y) = R^2 + \left(\frac{R}{r}\right)^4\left(x^2 - y^2\right) - \left(\frac{R}{r}\right)^2(x-y)$.

7. $u(r,\varphi) = a\frac{R}{r}\sin\varphi$;

8. $u(r,\varphi) = b + 3a\frac{R}{r}\sin\varphi - 4a\left(\frac{R}{r}\right)^3\sin 3\varphi$;

9. $U(r,\varphi) = a\frac{R}{r}\sin\varphi - \frac{8a}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{2k}\frac{\cos 2k\varphi}{4k^2-9}$.

10. $u = 3 + 4\left(\frac{R}{r}\right)^2\cos 2\varphi + \left(\frac{R}{r}\right)^4\cos 4\varphi$;

11. $u = -\frac{3R^2}{r}\sin\varphi + \frac{R^4}{3r^2}\sin 3\varphi + const$;

12. $u=-1-\frac{R}{R+2}\left(\frac{R}{r}\right)^{2}\cos 2\varphi;$

13. $u=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{\pi n}\left[1-(-1)^{n}\right]\left(\dfrac{R}{r}\right)^{n}\sin n\varphi.$

14. $u=\frac{3}{4r}\sin\varphi-\frac{1}{4r^{3}}\sin\left(3\varphi\right).$

15. $u\left(\rho,\varphi\right)=\frac{2}{3}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\cos\varphi$

16. $u\left(\rho\right)=2-\frac{\ln\rho}{\ln 2}$

17. $u\left(\rho,\varphi\right)=\left(-\frac{1}{3}\rho+\frac{4}{3\rho}\right)\cos\varphi+\frac{2}{3}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\sin\varphi.$

18. $u=\frac{3R}{4r}\sin\varphi-\frac{R}{4r^{3}}\sin\left(3\varphi\right).$

19. $u=a+\frac{R^{2}x}{x^{2}+y^{2}}.$

20. $u=c+\frac{R^{2}}{x^{2}+y^{2}}\left(ax+by\right).$

21. $c=0$ болғанда шешіледі, $u=-\frac{R^{3}}{x^{2}+y^{2}}\left(ax+by\right).$

22. $u=-\frac{1}{2r^{2}}\cos 2\varphi.$

23. $u=c+\frac{R}{r}\left(a\cos\varphi+b\sin\varphi\right).$

24. $c=0$ болғанда шешіледі, $u=-\frac{R^{2}}{r}\left(a\cos\varphi+b\sin\varphi\right)+const.$

25. $u=\frac{3R^{4}x(x^{2}+y^{2}-R^{2})}{4(x^{2}+y^{2})}+\left(\frac{R^{2}x}{(x^{2}+y^{2})}\right)^{3}.$

7.2.20. 20 - өзіндік жұмыс. Фурье және Лапластың интегралдық түрлендірулер әдісі

1. $u\left(x,t\right)=Ae^{-3t}\cos 2x+B\frac{x}{2}\sin x.$

2. $u\left(x,t\right)=xe^{2x}\sin 3t.$

3. $$u\left(x,t\right)=\begin{cases}3g\left(x-\frac{2}{3}t\right)-2g\left(x-t\right), & x>t,\\ 3g\left(x-\frac{2}{3}t\right)+2\displaystyle\int\limits_{0}^{t-x}f\left(t-x-\xi\right)d\xi, & \dfrac{2}{3}t<x<t,\\ 2\displaystyle\int\limits_{0}^{t-x}f\left(t-x-\xi\right)d\xi-2\displaystyle\int\limits_{0}^{t-\frac{3}{2}x}f\left(t-\dfrac{3}{2}x-\xi\right)d\xi, & x<\dfrac{2}{3}t.\end{cases}$$

4. $$u\left(x,t\right)=\frac{1}{2}\phi\left(x-at\right)+\frac{1}{2}\phi\left(x+at\right)+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\mu\left(\xi\right)d\xi.$$

5. $u(x,t) = \dfrac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\, d\xi d\tau.$

6. $u(x,t) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \phi(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi.$

7. $u(x,t) = \dfrac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \dfrac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau.$

8. $u(x,t) = -\dfrac{a}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \dfrac{\mu(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau.$

9. $u(x,t) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \dfrac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int\limits_0^\infty \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] f(\xi,\tau)\, d\xi.$

10. $u(x,t) = -\dfrac{1}{a} \int\limits_0^x f(x-\xi) \sin a\xi d\xi.$

11. $u(x,t) = x + t\cos x - \sin x + \dfrac{1}{2} x \sin x.$

12. $u(x,t) = t\cos x + \dfrac{1}{2} x \sin x + \int\limits_0^x f(\xi) \sin(x-\xi)\, d\xi.$

13. $u(x,t) = \begin{cases} \phi(x-t) + \mu(t), & x-t>0, \\ \mu(t), & x-t<0. \end{cases}$

14. $u(x,t) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\tau) \dfrac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}} d\xi d\tau.$

15. $u(x,t) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^\infty \varphi(\xi) \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right] d\xi.$

16. $u(x,t) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^\infty \varphi(\xi) \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right] d\xi.$

17. $u(x,t) = \int\limits_0^\infty 8\sin(\omega)\cos(\omega) \dfrac{2\cos^2(\omega) - 1}{\omega^2 - \pi^2} \sin(\omega x)\cos(4\omega t)\, d\omega.$

18. $u(x,t) = \int\limits_0^\infty \frac{10}{\pi(25+\omega^2)} \cos(\omega x) \cos(12\omega t)\, d\omega.$

19. $u(x,t) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{2\pi\omega} \frac{\sin(\pi\omega)}{1-\omega^2} \sin(\omega x) \sin(4\omega t)\, d\omega.$

20. $u(x,t) = \frac{1}{3e^2} \int\limits_0^\infty \left[\left(\frac{2\cos(\omega) - \omega\sin(\omega)}{\omega(4+\omega^2)} \right) \cos(\omega x) + \right.$
$\left. \left(\frac{\omega\cos(\omega)+2\sin(\omega)}{\omega(4+\omega^2)} \right) \sin(\omega x) \right] \sin(3\omega t)\, d\omega.$

21. $u(x,t) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{2 - \omega\sin(\omega) - 2\cos(\omega)}{\omega^3} \sin(\omega x) \cos(3\omega t)\, d\omega.$

22. $u(x,y) = \frac{1}{3}(\cos x - \cos 2x).$

23. $u(x,y) = e^{-5y} \sin 2x + x\cos x.$

24. $u(x,y) = xe^x \sin y.$

25. $u(x,y) = \cos x + \cos y + y - 1.$

Библиографиялық тізім

1. *Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф.* Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1985.

2. *Будак Б.М., Самарский А.Л., Тихонов А.И.* Сборник задач по математической физике. – М.: Наука, 1978.

3. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981.

4. *Костин А.Б., Тихонов И.В., Ткаченко Д.С.* Уравнения математической физики: Пособие по практическим занятиям. Часть I: учебное пособие. – М.: МИФИ, 2007. – 152 с.

5. *Костин А.Б., Тихонов И.В., Ткаченко Д.С.* Уравнения математической физики: пособие по практическим занятиям. Часть II: учебное пособие. – М.: МИФИ, 2008. – 328 с.

6. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б. Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 767 с.

7. *Орынбасаров М.О., Токибетов Ж.А., Тулегенова М.Б.* Методическая разработка лабораторных работ по уравнениям математической физики, Алма-Ата, 1983. – 328 с.

8. *Орынбасаров М.О., Сахаев Ш.С.* Математикалық физика теңдеулерінің есептері мен жаттығулар жинағы: оқу құралы. – Алматы: Қазақ университеті, 2009. – 203 б.

9. *Панов Ю.Д., Егоров Р.Ф.* Математическая физика. методы решения задач, Учебное пособие. – Екатеринбург, 2005. – 150 с.

10. *Пикулин В.П., Похожаев С.И.* Практический курс по уравнениям математической физики. – 2-е изд. – М.: МЦНМО, 2004. – 208 с.

11. *Рогов А.А., Семенова Е.Е., Чернецкий В.И., Щеголева Л.В.* Уравнения математической физики. Сборник примеров и упражнений. – Петрозаводск, 2001. – 220 с.

12. *Тихонов А.Я., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – 4-е изд. – М.: Наука, 1972.

13. *Токибетов Ж.А., Хайруллин Е.М.* Математикалық физика теңдеулері, оқулық. – Астана, Астана полиграфия, 2010. – 376 б.

14. *Alan Jeffrey* Advanced Engineering Mathematics. Massachusetts 01803, USA 2002, HARCOURT/ACADEMIC PRESS. http://www.harcourt-ap.com

15. *Kreyszig E.* Advanced Engineering Mathematics. – New York: Wiley, 1999. http://www.wiley.com/college/kreyszig

16. *William F. Trench* Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems. (2013). Books and Monographs. Book 9. http://digitalcommons.trinity.edu/mono/9

Қосымшалар

А-қосымшасы

Фурье түрлендірулерінің кестесі		
N	$f\left(x\right)$	$F\left(w\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-iwx}dx$
1	2	3
1	$af\left(x\right)+bg(x)$	$aF\left(w\right)+bG(w)$
2	$f^{(n)}\left(x\right)$	$(iw)^{n}F\left(w\right)$
3	$x^{n}f\left(x\right)$	$(i)^{n}\frac{d^{n}}{dw^{n}}\left[F\left(w\right)\right]$
4	$x^{m}f^{(n)}\left(x\right)$	$(i)^{m+n}\frac{d^{m}}{dw^{m}}\left[w^{n}F\left(w\right)\right]$
5	$f\left(ax\right),\ a>0$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{w}{a}\right)$
6	$f\left(x-a\right)$	$e^{-iwa}F\left(w\right)$
7	$e^{i\lambda x}f\left(x\right)$	$F\left(w-\lambda\right)$
8	$\left(f*g\right)\left(x\right)$	$\sqrt{2\pi}F\left(w\right)G(w)$
9	$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\vert f(x)\right\vert^{2}dx$	$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\vert F(w)\right\vert^{2}dw,$
10	$f\left(x\right)=\begin{cases}1,\ \vert x\vert<a,\\ 0,\ \vert x\vert>a\end{cases}\quad a>0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\sin aw}{w}\right)$
11	$\frac{\sin ax}{x},\ \ a>0$	$F\left(w\right)=\begin{cases}\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ \vert w\vert<a,\\ 0,\ \vert w\vert>a\end{cases}$
12	$f\left(x\right)=\begin{cases}1,\ a<x<b,\\ 0,\ x<a,\ x>b\end{cases}\quad a>b>0$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{-iaw}-e^{-ibw}}{iw}\right)$
13	$f\left(x\right)=\begin{cases}a-\left\vert x\right\vert,\ \vert x\vert<a,\\ 0,\ \vert x\vert>a,\end{cases}\quad a>0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1-\cos aw}{w^{2}}\right)$
14	$\frac{1}{a^{2}+x^{2}},\ a>0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-a\vert w\vert}}{a}$
15	$f\left(x\right)=\begin{cases}e^{-ax},\ 0<x,\\ 0,\ x<0,\end{cases}\quad a>0$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a+iw}\right)$

Жалғасы келесі бетте

1	2	3
16	$f = \begin{cases} e^{ax},\ b < x < c, \\ 0,\ x < b,\ x > c, \end{cases} \quad a > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{(a-iw)c} - e^{(a-iw)b}}{a - iw} \right)$
17	$e^{-a\lvert x\rvert},\ \ a > 0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{a}{a^2 + w^2} \right)$
18	$xe^{-a\lvert x\rvert},\ \ a > 0$	$-\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2iaw}{(a^2 + w^2)^2}$
19	$f\,(x) = \begin{cases} e^{iax},\ \lvert x\rvert < b, \\ 0,\ \lvert x\rvert > b \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\sin b(w-a)}{w - a} \right)$
20	$e^{-a^2x^2},\ \ a > 0$	$\frac{1}{a\sqrt{2}} e^{-\frac{w^2}{4a^2}}$
21	$f(x) = \begin{cases} x^a e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$	$\frac{(a)}{\sqrt{2\pi}\,(1 + iw)^a}$
22	$J_0(ax),\ \ a > 0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{H(a - \lvert w\rvert)}{\sqrt{a^2 - w^2}}$
23	$\delta(x - a),\ \ a \in R$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iaw}$

Лаплас түрлендіруінің кестесі			
N	$f\,(x)$	$F\,(p) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$	p мәндері
1	2	3	4
1	1	$\frac{1}{p}$	$p > 0$
2	t	$\frac{1}{p^2}$	$p > 0$
3	$t^n,\ n = 1, 2, ...$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$p > 0$
4	$t^a,\ \ a > -1$	$\frac{(a+1)}{p^{a+1}}$	$p > a$
5	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	$p > a$
6	$t^n e^{at},\ \ n = 1, 2, ...$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	$p > a$
7	$H(t-a)$	$\frac{e^{-ap}}{p}$	$p \geq a$
8	$\delta(t-a)$	e^{-ap}	$p > 0,\ a > 0$
9	$\sin at$	$\frac{a}{p^2+a^2}$	$p > 0$
10	$\cos at$	$\frac{p}{p^2+a^2}$	$p > 0$
11	$t\sin at$	$\frac{2ap}{\left(p^2+a^2\right)^2}$	$p > 0$
12	$t\cos at$	$\frac{p^2-a^2}{\left(p^2+a^2\right)^2}$	$p > 0$
13	$e^{at}\sin bt$	$\frac{b}{\left((p-a)^2+b^2\right)^2}$	$p > a$
14	$e^{at}\cos bt$	$\frac{p-a}{\left((p-a)^2+b^2\right)^2}$	$p > a$
15	$\frac{1}{2a^3}\sin at - \frac{1}{2a^2}t\cos at$	$\frac{1}{\left(p^2+a^2\right)^2}$	$p > 0$
16	$\frac{1}{2a}\sin at + \frac{1}{2}t\cos at$	$\frac{p^2}{\left(p^2+a^2\right)^2}$	$p > 0$
17	$1-\cos at$	$\frac{a^2}{p\,(p^2+a^2)}$	$p > 0$
18	$at - \sin at$	$\frac{a^3}{p^2\,(p^2+a^2)}$	$p > 0$
19	$sh\,(at)$	$\frac{p}{p^2-a^2}$	$p > \|a\|$
20	$ch\,(at)$	$\frac{p}{p^2-a^2}$	$p > \|a\|$

Жалғасы келесі бетте

1	2	3	4
21	$\frac{1}{2a^3}sh\,(at)+\frac{1}{2a^2}tch\,(at)$	$\frac{1}{\left(p^2-a^2\right)^2}$	$p>\vert a\vert$
22	$\frac{1}{2a}t\cdot sh\,(at)$	$\frac{p}{\left(p^2-a^2\right)^2}$	$p>\vert a\vert$
23	$\frac{1}{2a}sh\,(at)+\frac{1}{2}t\cdot ch\,(at)$	$\frac{p^2}{\left(p^2-a^2\right)^2}$	$p>\vert a\vert$
24	$sh\,(at)-\sin at$	$\frac{2a^3}{p^4-a^4}$	$p>\vert a\vert$

Б-қосымшасы

Белгілеулер үшін

Белгілеулер үшін

Белгілеулер үшін

Белгілеулер үшін

Белгілеулер үшін